INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE TOULOUSE

MATHS Rappels
Equations Différentielles

Jean-Pierre Bourgade
Pascal Floquet
Xuân Meyer

Première Année à Distance

Septembre 2011

Table des matières

Chapitre 3

Equations Différentielles

Ce document s'intéresse à la solution des équations différentielles du premier et second ordre. Nous débuterons en donnant la définition générale d'une équation différentielle d'ordre n. Puis, nous étudierons plus particulièrement les solutions des équations du premier ordre, puis celle du second ordre. Pour chaque cas présenté un exemple illustratif est donné et résolu.

3.1 Définition générale

On appelle équation différentielle d'ordre n, $n \in \mathbb{N}$,une équation de la forme :

$$\sum_{k=0}^{n} a_k(x) \frac{d^k y}{dx^k}(x) = b(x)$$

avec :
y la fonction cherchée
$b(x)$ est appelé **second membre** de l'équation
$a_k(x)$ des fonctions de x et $a_n \neq 0$.

Si les fonctions a_k sont des constantes, alors on dit que l'**équation différentielle est à coefficients constants**.

On rappelle que

$$\frac{d^0 y}{dx^0}(x) = y$$

Dans la suite, on notera
- y'(x) la dérivée première de y par rapport à x
- $y^{(2)}$ ou y" la dérivée seconde de y par rapport à x.
- $y^{(n)}$ la dérivée n^ième^ de y par rapport à x

L'équation différentielle sera dite **homogène** si et seulement si $b(x) = 0$.
L'équation différentielle sera dite **normalisée** si et seulement si $a_n(x) = 1$.

La résolution de l'équation homogène suppose la détermination de n solutions indépendantes $y_1, y_2, \ldots, y_n$ formant une base du sous-espace vectoriel des solutions. Ainsi, il faudra déterminer autant de solutions que l'ordre de l'équation, la solution générale étant une combinaison linéaire de ces solutions, soit :

$$y(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k(x) y_k(x)$$

La solution des équations peut être explicite, dans ce cas on obtient une relation du type $y = g(x)$ ou $x = h(y)$ mais elle peut être implicite et conduire à une relation du type $F(x, y) = 0$.

3.2 Equations différentielles du 1er ordre

3.2.1 Equations à variables séparables

Une équation différentielle est dite à variables séparables si on peut l'écrire sous la forme :

$$\varphi(x)dx = \psi(y)dy$$

On intègre alors chacun des côtés en considérant les variables indépendantes :

$$\int \varphi(x)dx = \int \psi(y)dy + C$$

où C est une constante réelle.

- ***Exemple 3.1*:** Résoudre l'équation (E1) :

$$x + yy' = 0 \tag{E1}$$

avec $y' = \dfrac{dy}{dx}$
(E1) peut s'écrire sous la forme :

$$x + y\frac{dy}{dx} = 0$$

On peut séparer les variables en écrivant l'équation sous la forme :

$$ydy = -xdx$$

puis intégrer :

$$\int ydy = -\int xdx$$

soit

$$\frac{1}{2}y^2 = -\frac{1}{2}x^2 + K$$

où K est une constante réelle d'où la solution de (E1) :

$$x^2 + y^2 = C$$

où C est une constante réelle

3.2.2 Equation différentielle linéaire à coefficients constants

On cherche les solutions aux équations du type :

$$a_1\frac{dy}{dx}(x) + a_0y(x) = b(x)$$

où a_0 et a_1 sont des constantes réelles et $a_1 \neq 0$.
Nous débuterons par l'étude des équations homogènes (i.e. avec un second membre nul). Puis en utilisant les résultats, nous verrons comment résoudre les équations avec second membre.

3.2.2.1 Equation homogène

Soit l'équation à résoudre :

$$a_1\frac{dy}{dx}(x) + a_0y(x) = 0$$

où a_0 et a_1 sont des constantes réelles et $a_1 \neq 0$.
Supposons que $y(x) \neq 0$, $\forall x$ alors, nous pouvons écrire :

$$\frac{y'(x)}{y(x)} + \frac{a_0}{a_1} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y'(x)}{y(x)} = -\frac{a_0}{a_1}$$

Intégrons par rapport à x. La primitive du membre de gauche est : $\ln|y(x)| + A$, donc nous obtenons :

$$ln\,|y(x)| = -\frac{a_0}{a_1}x + B$$

où B est une constante réelle qui tient compte des constantes d'intégration des deux membres. Prenons l'exponentielle de la relation précédente, on obtient :

$$|y(x)| = e^{-\frac{a_0}{a_1}x+B}$$

Or $e^{\alpha+\beta} = e^{\alpha}e^{\beta}$, d'où :

$$|y(x)| = e^{B}e^{-\frac{a_0}{a_1}x}$$

e^B est une constante réelle positive. Soit K cette constante. On a alors :

$$y(x) = \pm K e^{-\frac{a_0}{a_1}x}$$

L'expression $\pm K$ représente une constante positive ou négative, notons C cette constante réelle. On a alors :

$$y(x) = Ce^{-\frac{a_0}{a_1}x}$$

Nous obtenons donc une famille de fonctions. La constante C pourra être calculée pour répondre à un cas précis à partir, par exemple,d'une condition particulière du type : $y(x_1) = D$.

- ***Exemple 3.2*:** Résoudre l'équation (E2) :

$$y'(x) + y(x) = 0 \tag{E2}$$

1. en prenant la condition $y(0) = 1$
2. en prenant la condition $y(2) = \frac{3}{2}$

Solution : Partons de l'équation différentielle :

$$y'(x) + y(x) = 0$$

en supposant que $y(x) \neq 0$, $\forall x$, nous pouvons diviser cette équation par $y(x)$, soit :

$$\frac{y'(x)}{y(x)} + 1 = 0$$

soit :

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = -1$$

soit :

$$|y(x)| = e^{-x+A}$$

soit :

$$y(x) = Ce^{-x}$$

La constante C dépend de la condition initiale :

1. pour $y(0) = 1$, on obtient $C = 1$, soit $y(x) = e^{-x}$
2. pour $y(2) = \frac{3}{2}$, on obtient $C = \frac{3}{2}e^2$, soit $y(x) = \frac{3}{2}e^{2-x}$

3.2.3 Equation avec second membre

L'équation différentielle du premier ordre à coefficients constants avec second membre s'écrit :

$$a_1\frac{dy}{dx}(x) + a_0 y(x) = b(x)$$

où a_0 et a_1 sont des constantes réelles et $a_1 \neq 0$.

La méthode de résolution se décompose en deux points :

1. on résoud l'équation homogène : la solution générale est de la forme :

$$y(x) = Ce^{-\frac{a_0}{a_1}x}, \quad a_1 \neq 0, C \in \mathbb{R}$$

2. On considère que la constante C dépend de x (d'où le nom de la méthode : **méthode de la varaition de la constante**), soit :

$$y(x) = C(x)e^{-\frac{a_0}{a_1}x}$$

Appliquons cette méthode sur le cas général. Puisque l'équation différentielle fait intervenir la dérivée première, prenons la dérivée de l'expression précédente :

$$y'(x) = C'(x)e^{-\frac{a_0}{a_1}x} - \frac{a_0}{a_1}C(x)e^{-\frac{a_0}{a_1}x}$$

En injectant cette expression dans l'équation différentielle à résoudre, nous obtenons :

$$a_1\left(C'(x)e^{-\frac{a_0}{a_1}x} - \frac{a_0}{a_1}C(x)e^{-\frac{a_0}{a_1}x}\right) + a_0\left(C(x)e^{-\frac{a_0}{a_1}x}\right) = b(x)$$

soit :

$$a_1C'(x)e^{-\frac{a_0}{a_1}x} = b(x)$$

soit :

$$C'(x) = \frac{b(x)}{a_1}e^{\frac{a_0}{a_1}x}$$

En intégrant, on obtient :

$$C(x) = \int \frac{b(t)}{a_1}e^{\frac{a_0}{a_1}t}dt + D$$

Si on peut calculer explicitement cette intégrale, on en déduit la forme générale de la solution :

$$y(x) = \left(\int \frac{b(t)}{a_1}e^{\frac{a_0}{a_1}t}dt + D\right)e^{-\frac{a_0}{a_1}x}$$

La valeur de D est obtenue à partir d'une condition aux limites.

- ***Exemple 3.3*:** Résoudre l'équation (E3) :

$$y'(x) + y(x) = 1 \tag{E3}$$

avec la condition initiale $y(0) = 2$
L'équation homogène associée est :

$$y'(x) + y(x) = 0$$

Sa solution a été déterminée dans l'exemple précédent, nous avons donc :

$$y(x) = Be^{-x}$$

Supposons à present que B dépend de la variable x. On a alors :$y(x) = B(x)e^{-x}$.

$$y'(x) = B'(x)e^{-x} - B(x)e^{-x}$$

En injectant ces expressions dans l'équation différentielle, nous obtenons :

$$B'(x)e^{-x} - B(x)e^{-x} + B(x)e^{-x} = 1$$

Soit :

$$B'(x)e^{-x} = 1 \quad \Rightarrow B'(x) = e^x$$

Une primitive particulière de e^x peut s'écrire :

$$\int e^t dt$$

Un calcul simple donne :

$$\int e^t dt = e^x$$

d'où

$$B(x) = e^x + C$$

L'expression générale de la solution de l'équation différentielle est donc :

$$y(x) = [e^x + C]\, e^{-x} = 1 + Ce^{-x}$$

La constante C peut être calculée à partir de la condition initiale $y(0) = 2$. On obtient alors :

$$y(0) = 1 + Ce^0 = 1 + C$$

d'où $C = 1$. La solution est donc :

$$y(x) = 1 + e^{-x}$$

3.2.4 Equations différentielles linéaires à coefficients non constants

On considère ici les équations du type

$$A(x)y' + B(x)y = f(x)$$

où $A(x)$, $B(x)$ et $f(x)$ sont des fonctions de la variable réelle x. La procédure d'intégration est semblable à celle suivie pour résoudre une équation différentielle linéaire à coefficients constants et se déroule donc en 2 étapes :

1. **intégration sans second membre :** $A(x)y_1' + B(x)y_1 = 0$

   On résoud l'équation différentielle à variables séparables :

   $$\frac{dy_1}{y_1} = -\frac{B(x)}{A(x)}dx$$

   on obtient alors une solution du type

   $$y_1 = Ce^{u(x)}$$

   où $u(x) = -\displaystyle\int \frac{B(x)dx}{A(x)}$ et C est une constante réelle.

2. **intégration de l'équation complète : méthode de la variation de la constante**

   On recherche une solution particulière de l'équation avec second membre de la forme :

   $$y_2 = C(x)e^{u(x)}$$

   On considère donc maintenant C comme une fonction de x (et non plus comme une constante) et on cherche à déterminer C(x) telle que :

   $$y_2 = C(x)e^{u(x)}$$

   soit solution de l'équation différentielle avec le second membre.

3. **solution de l'équation complète**
   Sachant que si $y_1(x)$ est une solution de l'équation sans 2^{nd} membre et $y_2(x)$ une solution particulière de l'équation complète alors $y(x) = y_1(x) + y_2(x)$ est solution de l'équation complète, la solution de l'équation avec second membre s'écrit :

   $$y = e^{u(x)}(K + C(x))$$

   où K est une constante réelle.

- ***Exemple 3.4*:** Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E4) :

$$y' + \frac{2x}{(1+x^2)}y = 1 \tag{E4}$$

Ici $A(x) = 1$, $B(x) = \dfrac{2x}{(1+x^2)}$ et $f(x) = 1$

1. **Résolution de l'équation homogène(sans second membre)**

   On cherche dans un premier temps la fonction $y_1(x)$ telle que :

   $$y' + \frac{2x}{(1+x^2)}y = 0$$

   soit

   $$\frac{dy_1}{dx} + \frac{2x}{(1+x^2)}y_1 = 0$$

   Cette équation peut s'écrire :

   $$\frac{dy_1}{y_1} = -\frac{2xdx}{(1+x^2)}$$

   On peut effectuer une intégration à variables séparées. D'où :

   $$\ln|y_1| = -\ln(1+x^2) + K$$

   K, constante réelle, peut s'écrire $K = \ln(C)$où C est une constante réelle, d'où

   $$\ln|y_1| = -\ln(1+x^2) + \ln(C)$$

   or $\ln(a) - \ln(b) = \ln(\frac{a}{b})$ d'où :

   $$\ln|y_1| = \ln\left|\frac{C}{1+x^2}\right|$$

   $y_1(x) = \dfrac{C}{1+x^2}$ est solution de l'équation sans second membre

2. **Recherche d'une solution particulière de l'équation**

   On cherche une solution particulière de la forme $y_2(x) = \dfrac{C(x)}{1+x^2}$.

   y_2' s'écrit alors : $y_2' = \dfrac{C'(x)}{1+x^2} - \dfrac{2xC(x)}{(1+x^2)^2}$

   L'équation à résoudre devient :

   $$\frac{C'(x)}{1+x^2} - \frac{2xC(x)}{(1+x^2)^2} + \frac{2x}{(1+x^2)}\frac{C(x)}{(1+x^2)} = 1$$

   d'où

   $$C'(x) = 1 + x^2$$

   soit

   $$C(x) = x + \frac{x^3}{3} + K$$

   où K est une constante réelle. Dans la mesure où l'on recherche une solution particulière, on peut poser $K = 0$. Une solution particulière de l'équation différentielle est donc :

   $$y_2(x) = \frac{3x + x^3}{3(1+x^2)}$$

La solution générale de l'équation s'écrit $y = y_1 + y_2$ soit :

$$y = \frac{3x + x^3 + C}{3(1+x^2)}$$

où C est une constante réelle.

- ***Exemple 3.5*:** Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E5) :

$$xy' - y = \frac{x}{x^2-1} \tag{E5}$$

Ici $A(x) = x$, $B(x) = 1$ et $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$

1. **Résolution de l'équation homogène(sans second membre)**

   On cherche dans un premier temps la fonction $y_1(x)$ telle que :

   $$xy_1' - y_1 = 0$$

   soit

   $$x\frac{dy_1}{dx} - y_1 = 0$$

   Cette équation peut s'écrire :

   $$\frac{dy_1}{y_1} = \frac{dx}{x}$$

   On peut effectuer une intégration à variables séparées. D'où :

   $$\ln|y_1| = \ln(x) + K$$

   K, constante réelle, peut s'écrire $K = \ln(C)$où C est une constante réelle, d'où

   $$\ln|y_1| = \ln(x) + \ln(C)$$

   or $\ln(a) + \ln(b) = \ln(ab)$ d'où :

   $$\ln|y_1| = \ln(xC)$$

   $y_1(x) = C.x$ est solution de l'équation sans second membre

2. **Recherche d'une solution particulière de l'équation**

   On cherche une solution particulière de la forme $y_2(x) = xC(x)$.
   y_2' s'écrit alors : $y_2' = xC'(x) + C(x)$
   L'équation à résoudre devient :

   $$x\left[xC'(x) + C(x)\right] - xC(x) = \frac{x}{x^2-1}$$

   d'où

   $$C'(x) = \frac{1}{x(x^2-1)}$$

   soit

   $$C(x) = \int \frac{dx}{x(x^2-1)}$$

   Cette intégrale se calcule en décomposant la fraction rationnelle $\dfrac{dx}{x(x^2-1)}$ en éléments simples, soit :

   $$\frac{dx}{x(x^2-1)} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2(x-1)} + \frac{1}{2(x+1)}$$

   On obtient alors :

   $$C(x) = \int\left(-\frac{1}{x}\right)dx + \int\frac{dx}{2(x-1)} + \int\frac{dx}{2(x+1)}$$

   soit :

   $$C(x) = -\ln|x| + \frac{1}{2}\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|x+1| + K$$

   où K est une constante réelle. Cette fonction peut s'écrire :

   $$C(x) = -\ln|x| + \frac{1}{2}\ln\left|x^2-1\right| + K$$

Pour une solution particulière, on peut prendre K=0.
Une solution particulière de l'équation différentielle E5 est donc :

$$y_2(x) = x\left[-\ln|x| + \frac{1}{2}\ln\left|x^2-1\right| + K\right]$$

La solution générale de l'équation s'écrit $y = y_1 + y_2$ soit :

$$y = x\left[-\ln|x| + \frac{1}{2}\ln\left|x^2-1\right| + K\right] + \lambda x$$

où λ est une constante réelle

3.2.5 Equations différentielles homogènes en x et y

On appelle équations différentielles homogènes en x et y les équations différentielles qui peuvent se mettre sous la forme :

$$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

Dans ce cas, on pose : $y = u(x).x$ et on cherche à déterminer la fonction u(x) qui vérifie :

$$\frac{du}{dx}x + u(x) = \varphi(u)$$

Cette équation différentielle est une équation différentielle à variables séparables (voir 3.2.1 page 6).

- ***Exemple 3.6*:** Déterminer la forme générale de la solution de l'équation (E6) :

$$xy' - 2y + x = 0 \tag{E6}$$

L'équation (E3) peut s'écrire :

$$y' = 2\frac{y}{x} - 1$$

On pose $y = x.u(x)$ soit $y' = u(x) + xu'(x)$
et (E3) s'écrit alors :

$$\frac{du}{dx}x + u(x) = 2u(x) - 1$$

soit :

$$\frac{du}{u(x)-1} = \frac{dx}{x}$$

d'où

$$\ln|u-1| = \ln|x| + K$$

soit

$$u(x) - 1 = Cx$$

où C est une constante réelle.
On obtient alors :

$$y = Cx^2 + x$$

où C est une constante réelle

3.3 Equations différentielles du second ordre

3.3.1 Equations du 2^{nd} ordre se ramenant au 1^{er} ordre

La résolution de certaines équations différentielles du 2^{nd} ordre peut, par un changement de fonction ou de variable simple, se ramener à la résolution successive de deux équations différentielles du 1^{er} ordre.

3.3.1.1 Equations du type : F(x,y',y")=0

Si y n'intervient pas explicitement dans l'équation différentielle, on pose :

$$z = y'$$

On obtient alors équation du 1^{er} ordre en z :

$$F(x, z, z') = 0$$

que l'on résoud suivant les principes énoncés précédemment. Il faut ensuite intégrer z(x) pour déterminer y.

- ***Exemple 3.7*:** Résoudre l'équation différentielle du second ordre(E7)

$$y'' = \frac{1}{a}\sqrt{1 + y'^2} \tag{E7}$$

y n'intervient pas explicitement dans (E7) , on pose :

$$y'(x) = z(x)$$

soit

$$y''(x) = z'(x)$$

(E4) devient :

$$z' = \frac{1}{a}\sqrt{1 + z^2}$$

On est en présence d'une équation différentielle à variables séparables :

$$\frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = \frac{1}{a}dx$$

$$\int \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = \int \frac{1}{a}dx$$

Posons $I = \int \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}}$ L'intégrale I s'obtient en posant $z = sht$ soit $dz = chtdt$

$$I = \int \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = \int \frac{chtdt}{\sqrt{1+sh^2t}} = \int \frac{chtdt}{|cht|} = \int dt = t + C$$

où C est une constante réelle. d'où :

$$Arcsh(z) = \frac{1}{a}x + K$$

où K est une constante réelle
soit :

$$z(x) = sh(\frac{1}{a}x + K)$$

Pour déterminer $y(x)$, il faut intégrer $z(x)$ par rapport à x :

$$y(x) = \int z(x)dx = \int sh(\frac{1}{a}x + K)dx = ach\left(\frac{x}{a} + K\right) + \lambda$$

La solution de (E7) est donc :

$$y(x) = ach\left(\frac{x}{a} + K\right) + \lambda$$

où K et λ sont deux constantes réelles.

3.3.1.2 Equations du type : F (y , y' , y") = 0

Si x n'intervient pas explicitement dans l'équation différentielle, on pose :

$$z(y) = y'$$

On a alors :

$$y'' = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = z\frac{dz}{dy}$$

L'équation différentielle $F(y, y', y'') = 0$ devient :

$$F(y, y', z\frac{dz}{dy}) = 0$$

équation différentielle du 1[er] ordre de la variable y. On détermine donc $z(y)$ puis on résoud l'équation différentielle du 1[er] ordre : $\frac{dy}{dx} = z(y)$

- ***Exemple 3.8:*** Résoudre l'équation différentielle du second ordre(E8)

$$1 + y'^2 = yy'' \tag{E8}$$

x n'intervient pas explicitement dans (E8) , on pose :

$$y' = z(y)$$

soit

$$y'' = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = z\frac{dz}{dy}$$

(E5) devient :

$$1 + z^2 = yz\frac{dz}{dy}$$

soit :

$$\int \frac{zdz}{1+z^2} = \int \frac{dy}{y}$$

d'où

$$\frac{1}{2}\ln\left|1+z^2\right| = \ln|y| + \lambda$$

où λ est une constante réelle. soit :

$$1 + z^2 = C^2y^2$$

où C est une constante réelle.

soit

$$z = \pm\sqrt{C^2y^2 - 1}$$

Pour déterminer $y(x)$, il faut encore intégrer : $y' = \pm\sqrt{C^2y^2-1}$ Soit :

$$\frac{dy}{\sqrt{C^2y^2-1}} = \pm dx$$

En effectuant le changement de variable $C.y = cht$, on intègre facilement le membre de gauche, ce qui conduit à :

$$y = \frac{1}{C}ch\left(\pm C(x+K)\right)$$

où K et C sont des constantes réelles.

3.3.1.3 Equations du type : F (x, y , y' , y") = 0 homogène en y,y',y"

Si $F(x,y,y',y'')=0$ est homogène en y,y',y", on peut la mettre sous la forme :

$$G(x,\frac{y'}{y},\frac{y''}{y})=0$$

et l'on prend $\frac{y'}{y}$ comme nouvelle fonction inconnue. On a :

$$p(x)=\frac{y'}{y}$$

et

$$dp(x)=\frac{y''}{y}-\frac{y'^2}{y^2}$$

Il faut donc résoudre

$$G(x,p,p^2+\frac{dp}{dx})=0$$

équation différentielle du 1^{er} ordre. Après avoir déterminé $p(x)$, il suffit de résoudre l'équation du 1^{er} ordre :

$$y'(x)=y(x)p(x)$$

3.3.2 Equations linéaires homogènes à coefficients constants

On cherche ici à déterminer la solution des équations différentielles du type :

$$ay''+by'+cy=0$$

où a,b et c sont des constantes et $a\neq 0$.
On cherche une solution du type :

$$y=e^{rx}$$

Le développement de l'équation différentielles avec cett fonction y, conduit à l'équation caractéristique :

$$ar^2+br+c=0$$

Suivant le signe du discriminant ($\Delta=b^2-4ac$) les solutions sont :

- $\Delta>0$: on a deux racines réelles : r_1 et r_2

$$y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$$

- $\Delta<0$: on a deux racines imaginaires conjuguées : $r_1=\alpha+\beta j$ et $r_2=\alpha-\beta j$

$$y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}=e^{\alpha x}\left[A\cos(\beta x)+B\sin(\beta x)\right]$$

- $\Delta=0$: on a une racine réelle double : r

$$y=e^{rx}(C_1x+C_2)$$

Dans tous les cas, les constantes C_1 et C_2 seront fixées par les conditions initiales.

- ***Exemple 3.9*:** Résoudre l'équation différentielle du second ordre(E9)

$$y''(x)+y(x)=0 \tag{E9}$$

avec les conditions :

$$\begin{cases} y(0)=1 \\ y'(0)=0 \end{cases}$$

l'équation caractéristique associée à cette équation est :

$$r^2+1=0$$

Le discriminant ($\Delta = -4 = (2j)^2$) est négatif et cette équation admet deux racines complexes :$r_1 = j$ et $r_2 = -j$. La solution de l'équation est donc :

$$y(x) = Ae^{jx} + Be^{-jx}$$

qui peut s'écrire sous la forme :

$$y(x) = C\cos(x) + D\sin(x)$$

On détermine les constantes réelles C et D grâce aux conditions aux limites. Pour cela il faut calculer la dérivée de y, soit :

$$y'(x) = -C\sin(x) + D\cos(x)$$

Soit :

$$\begin{cases} y(0) = C = 1 \\ y'(0) = D = 0 \end{cases}$$

La solution recherchée est donc :$y(x) = \cos(x)$

- ***Exemple 3.10*:** Résoudre l'équation différentielle du second ordre(E10)

$$y''(x) - y(x) = 0 \tag{E10}$$

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

l'équation caractéristique associée à cette équation est :

$$r^2 - 1 = 0$$

Le discriminant ($\Delta = 4$) est positif et cette équation admet deux racines réelles : $r_1 = 1$ et $r_2 = -1$. La solution de l'équation est donc :

$$y(x) = Ae^{x} + Be^{-x}$$

On détermine les constantes réelles A et B grâce aux conditions aux limites. Pour cela il faut calculer la dérivée de y, soit :

$$y'(x) = Ae^{x} - Be^{-x}$$

Soit :

$$\begin{cases} y(0) = A + B = 0 \\ y'(0) = A - B = 1 \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} A = \dfrac{1}{2} \\ B = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

La solution recherchée est donc :

$$y(x) = \frac{1}{2}(e^{x} - e^{-x})$$

- ***Exemple 3.11*:** Résoudre l'équation différentielle du second ordre(E11)

$$y''(x) + 2y'(x) + y(x) = 0 \tag{E11}$$

avec les conditions :

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

l'équation caractéristique associée à cette équation est :

$$r^2 + 2r + 1 = 0$$

Le discriminant ($\Delta = 0$) est nul et cette équation admet une racines double : $r = -1$. La solution de l'équation est donc :

$$y(x) = (Ax + B)e^{-x}$$

On détermine les constantes réelles A et B grâce aux conditions aux limites. Soit :

$$\begin{cases} y(0) = B = 1 \\ y(1) = (A + B)e^{-1} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -1 \\ B = 1 \end{cases}$$

$$y(x) = (1 - x)e^{-x}$$

3.3.3 Equations linéaires à coefficients constants avec second membre

On cherche ici à déterminer la solution des équations différentielles du type :

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = f(x)$$

où a, b et c sont des constantes, et $a \neq 0$.

La méthode de résolution se décompose en deux points :

1. On résoud l'équation homogène. On obtient la solution générale : y_1
2. On recherche une solution particulière de l'équation avec second membre : y_2

La solution générale de l'équation est alors :

$$y(x) = y_1(x) + y_2(x)$$

Nous présentons ci-après la forme des solutions particulières pour quelques cas particuliers de fonctions f(x). Nous précisons deux règles qui permettent de trouver les solutions particulières dans quelques cas supplémentaires.

Règle 1 : Si l'équation caractéristique possède une racine d'ordre p et si le second membre $f(x)$ contient un terme du type $x^k u(x)$ où $u(x)$ est une des fonctions génératrices de la solution de l'équation sans second membre issue de cette racine, alors une solution particulière $y_2(x)$ sera une combinaison linéaire de $x^{k+p}u(x)$ et de ses dérivées linéairement indépendantes.

Règle 2 : si $f(x)$ est combinaison linéaire des cas particuliers présentés ci-après, la solution particulière recherchée est une combinaison linéaire des solutions particulières proposées pour chacun des cas.

3.3.3.1 cas particuliers : $f(x)$ est polynôme de degré n

Si $f(x)$ est un polynôme de degré n et $c \neq 0$ et $b \neq 0$, on peut montrer qu'une solution particulière est un polynôme de même degré.
Si $f(x)$ est un polynôme de degré n et si $c = 0$ et $b \neq 0$ alors y(x) sera un polynome de degré $n + 1$. Il suffit d'identifier les coefficients du polynôme en calculant y' et y'' et en les introduisant dans l'équation différentielle.

- ***Exemple 3.12*:** Résoudre l'équation différentielle du second ordre(E12)

$$y'' - 5y' + 6y = 3x \tag{E12}$$

1. recherche de la solution de l'équation homogène : y" - 5 y' + 6 y = 0

   L'équation caractéristique obtenue en recherchant une solution du type $y(x) = e^{rx}$ est :

   $$r^2 - 5r + 6 = 0$$

   Cette équation du second ordre admet deux solutions réelles : $r_1 = 3$ et $r_2 = 2$ La solution de l'équation (E12) sans second membre est donc :

   $$y_1 = Ae^{2x} + Be^{3x}$$

   où A et B sont des constantes réelles.

2. Détermination d'une solution particulière de l'équation (E12)

   Le second membre est un polynôme d'ordre 1. On recherche comme solution particulière un polynôme de même ordre soit $y_2(x) = Cx + D$

   $$y_2'(x) = C$$

   et

   $$y_2''(x) = 0$$

L'équation (E12) appliquée à y_2 conduit à l'égalité valable quelque soit x :

$$-5C + 6(C.x + D) = 3x$$

d'où :

$$\left\{\begin{array}{lcl} 6C & = & 3 \\ -5C + 6D & = & 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} C = \dfrac{1}{2} \\ D = \dfrac{5}{12} \end{array}\right.$$

Une solution particulière de (E12) est donc :

$$y_2 = \frac{1}{2}x + \frac{5}{12}$$

La solution générale de l'équation (E12) peut donc s'écrire : $y = Ae^{2x} + Be^{3x} + \dfrac{1}{2}x + \dfrac{5}{12}$ où A et B sont des constantes réelles.

3.3.3.2 cas particuliers : $f = Ke^{\alpha x}$

- si α n'est pas solution de l'équation caractéristique, on recherche une intégrale particulière du type $y_2 = Ae^{\alpha x}$
- si α est racine d'ordre p de l'équation caractéristique on cherche y_2 tel que $y_2 = P(x)e^{\alpha x}$ où $P(x)$ est un polynome de degré p

- ***Exemple 3.13*:** Résoudre l'équation différentielle du second ordre(E13)

$$y^{(2)} - 3y' + 2y = e^x \tag{E13}$$

avec les conditions initiales

$$y(0) = 1 \quad et \quad y'(0) = 0$$

Solution :
Nous devons d'abord chercher la solution de l'équation homogène, soit :

$$y^{(2)} - 3y' + 2y = 0$$

L'équation caractéristique s'écrit :

$$r^2 - 3r + 2 = 0$$

Elle a pour racine $r_1 = 1$ et $r_2 = 2$. La forme générale des solutions est donc :

$$y_1(x) = Ae^x + Be^{2x}$$

où A et B sont des constantes réelles.

Il faut maintenant déterminer une solution particulière. e^x étant une des fonctions génératrices de y_1, la solution particulière recherchée est du type : $y_2(x) = P(x)e^x$ où $P(x)$ est un polynôme de degré 1, soit :

$$y_2(x) = (cx + d)e^x$$

Dans ce cas :

$$y_2' = (cx + d)e^x + ce^x$$

$$y_2'' = (cx + d + c)e^x + ce^x = (cx + d + 2c)e^x$$

En injectant ces relations dans l'équation différentielle, nous obtenons :

$$\begin{array}{rcl} y^{(2)} - 3y' + 2y & = & e^x\left[(cx + d + 2c) - 3(cx + d + c) + 2(cx + d)\right] \\ & = & e^x\left(-c\right) \end{array}$$

On a donc :

$$-ce^x = e^x$$

soit

$$c = -1$$

d'où :

$$y_2(x) = e^x(-x + d)$$

Dans la mesure où nous recherchons une solution particulière, on prend la fonction y_2 pour laquelle $d = 0$, soit :

$$y_2(x) = e^x(-x)$$

La solution de l'équation est donc :

$$y(x) = Ae^x + Be^{2x} + e^x(-x)$$

soit :

$$y(x) = (A - x)e^x + Be^{2x}$$

Les constantes A et B sont déterminées à partir des conditions aux limites. Il faut pour cela calculer la dérivée de y :

$$y'(x) = (A - x - 1)e^x + 2Be^{2x}$$

Le système à résoudre est :

$$\left\{\begin{array}{l} y(0) = A + B = 1 \\ y'(0) = A - 1 + 2B = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} A = 1 - B \\ 1 - B - 1 + 2B = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} A = 1 \\ B = 0 \end{array}\right.$$

La solution recherchée est donc : $y(x) = (1 - x)e^x$

- ***Exemple 3.14*:** Résoudre (E14)

$$y'' + 4y' + 4y = 4x^2 + 6e^x \tag{E14}$$

1. recherche de la solution de l'équation homgène associée à (E14) :$y_1'' + 4y_1' + 4y_1 = 0$

   L'équation caractéristique obtenue en recherchant une solution du type $y_1(x) = e^{rx}$ est :

   $$r^2 + 4r + 4 = 0$$

   Cette équation du second ordre admet une racine double : $r = -2$
   La solution de l'équation (E14) sans second membre est donc :

   $$y_1 = e^{-2x}\,(C_1 x + C_2)$$

   où C_1 et C_2 sont des constantes réelles.
2. Détermination d'une solution particulière de l'équation (E14)
   Le second membre est une combinaison linéaire d'un polynôme d'ordre 2 et d'une fonction exponentielle. On recherche comme solution particulière du type :

   $$y_2(x) = (Ax^2 + Bx + C) + De^x$$

   On a

   $$y_2'(x) = 2Ax + B + De^x$$

   et

   $$y_2''(x) = 2A + De^x$$

   L'équation (E14) appliquée à y_2 conduit à l'égalité valable quelque soit x :

   $$2A + De^x + 4.(2Ax + B + De^x) + 4(Ax^2 + Bx + C) + De^x = 4x^2 + 6e^x$$

   soit

   $$4Ax^2 + (8A + 4B)x + (2A + 4B + 4C) + 9De^x = 4x^2 + 6e^x$$

d'où :

$$\left\{\begin{array}{lcl} 4A & = & 4 \\ 8A+4B & = & 0 \\ 2A+4B+4C & = & 0 \\ 9D & = & 6 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} A=1 \\ B=-2 \\ C=\dfrac{3}{2} \\ D=\dfrac{2}{3} \end{array}\right.$$

La solution particulière recherchée est donc :

$$y_2 = x^2 - 2x + \frac{3}{2} + \frac{2}{3}e^x$$

La solution générale de l'équation (E14) est donc :

$$y = e^{-2x}\left(C_1 x + C_2\right) + x^2 - 2x + \frac{3}{2} + \frac{2}{3}e^x$$

où C_1 et C_2 sont des constantes réelles.

3.3.3.3 cas particuliers : $f = e^{\alpha x} * P(x)$

$f = e^{\alpha x} * P(x)$ où P(x) est un polynôme de degré p.

on cherche une solution du type $z = e^{\alpha x} * Q(x)$ où Q(x) est un polynôme de degré q. Le degré du polynôme $Q(x)$ dépend de α.

- si α n'est pas racine de l'équation caractéristique alors $q = p$
- si α est racine simple de l'équation caractéristique alors $q = p + 1$
- si α est racine double de l'équation caractéristique alors $q = p + 2$

- ***Exemple 3.15*****:** Résoudre (E15)

$$y'' + 4y' + 4y = 3xe^{-2x} \tag{E15}$$

1. recherche de la solution de l'équation homgène associée à (E15) :$y_1'' + 4y_1' + 4y = 0$

   L'équation caractéristique obtenue en recherchant une solution du type $y(x) = e^{(rx)}$ est :

   $$r^2 + 4r + 4 = 0$$

   Cette équation du second ordre admet une racine double : r = -2
   La solution de l'équation (E15) sans second membre est donc :

   $$y_1 = e^{-2x}\left(C_1 x + C_2\right)$$

   où C_1 et C_2 sont des constantes réelles.
2. Détermination d'une solution particulière de l'équation (E15)

   On note que -2 est racine d'ordre 2 de l'équation caractéristique et que le second membre de l'équation est du type $P(x)e^{-2x}$ avec $P(x) = 3x$, polynome de degré p=1. Selon la règle énoncée ci-dessus, on recherche donc comme solution particulière une solution du type $Q(x)e^{-2x}$ avec $Q(x)$ polynome de degré $q = p+2 = 3$. Les termes en xe^{-2x} et e^{-2x} peuvent être omis car déjà contenues dans $y_1(x)$. On cherche donc une solution particulière du type

   $$y_2(x) = Ax^3e^{-2x} + Bx^2e^{-2x}$$

   On a

   $$y_2'(x) = (3Ax^2 - 2Ax^3)e^{-2x} + (2Bx - 2Bx^2)e^{-2x}$$

   et

   $$y_2''(x) = (6Ax - 12Ax^2 + 4Ax^3)e^{-2x} + (2B - 8Bx + 4Bx^2)e^{-2x}$$

L'équation (E8) appliquée à y_2 conduit à l'égalité valable quelque soit x :

$$\begin{aligned} 3xe^{-2x} &= (6Ax - 12Ax^2 + 4Ax^3)e^{-2x} + (2B - 8Bx + 4Bx^2)e^{-2x} \\ &\quad +4[(3Ax^2 - 2Ax^3)e^{-2x} + (2Bx - 2Bx^2)e^{-2x}] + 4[Ax^3e^{-2x} + Bx^2e^{-2x}] \end{aligned}$$

Soit :

$$6Ax + 2B = 3x$$

d'où :

$$\begin{cases} 6A = 3 \\ 2B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \dfrac{1}{2} \\ B = 0 \end{cases}$$

La solution particulière de l'équation (E15) est donc :

$$y_2(x) = \frac{1}{2}x^3e^{-2x}$$

La solution générale de l'équation (E15) est donc :

$$y = e^{-2x}(C_1x + C_2) + \frac{1}{2}x^3e^{-2x}$$

où C_1 et C_2 sont des constantes réelles.

- ***Exemple 3.16*:** Résoudre (E16)

$$y'' - 4y' + 4y = (x+1)e^{2x} \tag{E16}$$

avec les conditions initiales :

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

Solution :

L'équation homogène est :

$$y'' - 4y' + 4y = 0$$

L'équation caractéristique associée est :

$$r^2 - 4r + 4 = 0$$

Cette équation possède une racine double $r = 2$. Les solutions de l'équation homogène sont donc :

$$y_1(x) = (Ax + B)e^{2x}$$

Cherchons une solution particulière à l'équation avec second memebre :

$$y'' - 4y' + 4y = (x+1)e^{2x}$$

Le second membre est du type $e^{(\alpha x)} * P(x)$ où $P(x)$ est un polynôme de degré 1 et α est racine double de l'équation caractéristique. Dans ce cas, il faut chercher une solution du type : $e^{\alpha x} * Q(x)$ où $Q(x)$ est un polynôme de de degré 3, soit :

$$y_2(x) = (a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0)e^{2x}$$

Comme dans l'exercice précédent les termes en xe^{2x} et e^{2x} peuvent être omis car déjà contenus dans la solution de l'équation homogène.
Après avoir calculé les dérivées première et seconde de y_2 et injecté les relations obtenues dans l'équation à résoudre, on obtient :

$$\begin{cases} 6a_3 = 1 \\ 2a_2 = 1 \end{cases}$$

La solution particulière recherchée est donc :

$$y_2(x) = (\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2)e^{2x}$$

La solution générale est donc de la forme :

$$y(x) = (\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + Ax + B)e^{2x}$$

On obtient les valeurs de A et B en appliquant les conditions aux limites :

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

Soit :

$$\begin{cases} y(0) = B = 1 \\ y(1) = (\frac{1}{6} + \frac{1}{2} + A + B)e^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = 1 \text{ pour i variant de 1 à n} \\ A + B = -\dfrac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = 1 \text{ pour i variant de 1 à n} \\ A = -\dfrac{5}{3} \end{cases}$$

La solution recherchée est donc :

$$y(x) = (\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{3}x + 1)e^{2x}$$

3.3.3.4 cas particuliers : $f(x) = K\sin(ax)$ ou $f(x) = K\cos(ax)$

- Si $\sin(ax)$ ou $\cos(ax)$ n'est pas solution de l'équations sans second membre, on cherche une solution particulière du type :
$$y(x) = A\cos(ax) + B\sin(ax)$$
- Si $\sin(ax)$ ou $\cos(ax)$ est solution de l'équations sans second membre, on cherche une solution particulière du type :
$$y(x) = Ax\cos(ax) + Bx\sin(ax)$$
- ***Exemple 3.17*:** Résoudre (E17)

$$y'' - 3y' + 2y = 3\sin(x) + 2xe^{3x} \tag{E17}$$

1. recherche de la solution de l'équation homgène associée à (E17) :$y_1'' - 3y_1' + 2y = 0$

   L'équation caractéristique obtenue en recherchant une solution du type $y(x) = e^{rx}$ est :
   $$r^2 - 3r + 2 = 0$$
   Cette équation du second ordre admet deux solutions réelles : $r_1 = 1$ et $r_2 = 2$ La solution de l'équation (E9) sans second membre est donc :
   $$y_1 = C_1e^x + C_2e^{2x}$$
   où C_1 et C_2 sont des constantes réelles.
2. Détermination d'une solution particulière de l'équation (E17) :
   Le second membre est une combinaison linéaire d'une fonction trigonométrique et du produit d 'une fonction exponentielle par une polynôme d'ordre 1. On recherche comme solution particulière du type :
   $$y_2(x) = (Ax + B)e^{3x} + C\sin(x) + D\cos(x)$$
   On a
   $$y_2'(x) = (3Ax + 3B + A)e^{3x} + C\cos(x) - D\sin(x)$$
   et
   $$y_2''(x) = (9Ax + 9B + 6A)e^{3x} - C\sin(x) - D\cos(x)$$
   L'équation (E17) appliquée à y_2 conduit à l'égalité valable quelque soit x :

$$\begin{aligned} 3\sin(x) + 2xe^{3x} &= (9Ax + 9B + 6A)e^{3x} - C\sin(x) - D\cos(x) - 3[(3Ax + 3B + A)e^{3x} \\ &\quad + C\cos(x) - D\sin(x)] + 2[(Ax + B)e^{3x} + C\sin(x) + D\cos(x)] \end{aligned}$$

Soit :

$$e^{3x}(2Ax + 2B + 3A) + \sin(x)(C + 3D) + \cos(x)(D - 3C) = 3\sin(x) + 2xe^{3x}$$

$$\left\{\begin{array}{lcl} 2A & = & 2 \\ 3A + 2B & = & 0 \\ C + 3D & = & 3 \\ -3C + D & = & 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} A = 1 \\ B = -\dfrac{3}{2} \\ C = \dfrac{3}{10} \\ D = \dfrac{9}{10} \end{array}\right.$$

La solution particulière de l'équation (E17) est donc :

$$y_2(x) = (x - \frac{3}{2})e^{3x} + \frac{3}{10}\sin(x) + \frac{9}{10}\cos(x)$$

La solution générale de l'équation (E17) est donc :

$$y = C_1e^{x} + C_2e^{2x} + (x - \frac{3}{2})e^{3x} + \frac{3}{10}\sin(x) + \frac{9}{10}\cos(x)$$

où C_1 et C_2 sont des constantes réelles.