INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE TOULOUSE

MATHS Rappels
Equations Différentielles
Solutions de la série 3

Pascal Floquet
Xuân Meyer
Jean-Claude Satge

Première Année à Distance

Septembre 2008

Chapitre 3

Equations Différentielles : solutions de la série 3

3.1 Equations différentielles d'ordre 1

• ***Exercice 3.1:*** *Déterminer la forme générale de la solution de l'équation différentielle (E1) :*

$$x^3y' = y^2(x-4) \tag{E1}$$

Solution : C'est une équation différentielle du premier ordre à coefficients non constants et non linéaire. On peut écrire l'équation (E1) sous la forme :

$$\frac{dy}{y^2} = \frac{(x-4)dx}{x^3}$$

Les variables sont séparées, on intègre séparément les membres de droite et gauche.

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int \frac{dx}{x^2} - 4\int \frac{dx}{x^3}$$

d'où

$$-\frac{1}{y} = -\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + C$$

$y = \dfrac{x^2}{Cx^2 + x - 2}$ où C est une constante réelle.

• ***Exercice 3.2:*** *Déterminer la forme générale de la solution de l'équation différentielle (E2) :*

$$y' + 8x^3y^3 + 2xy = 0 \tag{E2}$$

Solution : C'est une équation différentielle du premier ordre à coefficients non constants et non linéaire.On peut écrire l'équation (E1) sous la forme :

$$y' + 8x^6\frac{y^3}{x^3} + 2x^2\frac{y}{x} = 0$$

Posons : $z = \dfrac{y}{x}$. On a alors : $y = xz$ et $y' = xz' + z$.
L'équation (E2)s'écrit :

$$xz' + z + 8x^6z^3 + 2x^2z = 0$$
$$xz' + z(1 + 2x^2) + 8x^6z^3 = 0$$

Divisons cette expression par z^3 :

$$x\frac{z'}{z^3} + \frac{1+2x^2}{z^2} + 8x^6 = 0$$

Posons : $t = \dfrac{1}{z^2}$ soit $t' = -2\dfrac{z'}{z^3}$.

L'équation devient (E'2) : $-\frac{x}{2}t' + t(1+2x^2) + 8x^6 = 0$.

Cette équation est une équation différentielle du premier ordre linéaire en t à coefficients non constants.On résoud l'équation homogène, puis on recherchera une solution particulière.

1. **Solution de l'équation homogène** :

$$-\frac{x}{2}t_1' + t_1(1+2x^2) = 0$$

$$\frac{dt_1}{t_1} = 2\frac{1+2x^2}{x}dx$$

$$\frac{dt_1}{t_1} = \frac{2dx}{x} + 4xdx$$

$$\ln|t_1| = 2\ln|x| + 2x^2 + K$$

$$t_1 = e^{2\ln|x|+2x^2+K}$$

$t_1 = Cx^2e^{2x^2}$ où C est une constante réelle.

2. **Solution particulière** : on applique la méthode de la variation de la constante. On suppose donc que :

$$t_2 = C(x)x^2e^{2x^2}$$

$$t_2' = C'x^2e^{2x^2} + 2Cxe^{2x^2} + Cx^2(4x)e^{2x^2} = e^{2x^2}\left[C'x^2 + 2Cx + 4Cx^3\right]$$

En injectant ces relations dans l'équation (E'2), nous obtenons :

$$-\frac{x}{2}e^{2x^2}\left[C'x^2 + 2Cx + 4Cx^3\right] + (1+2x^2)(C(x)x^2e^{2x^2}) + 8x^6 = 0$$

$$-\frac{x}{2}e^{2x^2}C'x^2 - e^{2x^2}\frac{x}{2}C\left[2x + 4x^3\right] + (2x^2+1)Cx^2e^{2x^2} + 8x^6 = 0$$

$$x^3e^{2x^2}C' = 16x^6$$

$$C' = 16x^3e^{-2x^2}$$

Une primitive de C' est de la forme :

$$C(x) = (a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0)e^{-2x^2}$$

$$C'(x) = \left[(4a_4x^3 + 3a_3x^2 + 2a_2x + a_1) - 4x(a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0)\right]e^{-2x^2}$$

$$C'(x) = \left[-4a_4x^5 - 4a_3x^4 + x^3(4a_4 - 4a_2) + x^2(3a_3 - 4a_1) + x(2a_2 - 4a_0) + a_1\right]e^{-2x^2}$$

soit en identifiant les coefficients :

$$\begin{cases} a_4 = 0 \\ a_3 = 0 \\ 4a_4 - 4a_2 = 16 \\ 3a_3 - 4a_1 = 0 \\ 2a_2 - 4a_0 = 0 \\ a_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_4 = 0 \\ a_3 = 0 \\ a_2 = -4 \\ a_1 = 0 \\ a_0 = -2 \end{cases}$$

$$C(x) = (-4x^2 - 2)e^{-2x^2}$$

d'où la solution particulière de l'équation (E'2) recherchée :

$$t_2 = (-4x^2 - 2)e^{-2x^2}x^2e^{2x^2} = x^2(-4x^2 - 2)$$

La **solution générale** de l'équation (E'2) est donc :

$$t(x) = x^2(-4x^2 - 2) + Cx^2e^{2x^2}$$

On a donc :

$$\begin{aligned}
\frac{x^2}{y^2} &= x^2\left[(-4x^2-2)+Ce^{2x^2}\right] \\
\frac{1}{y^2} &= (-4x^2-2)+Ce^{2x^2}
\end{aligned}$$

D'où : $y = \pm\sqrt{\dfrac{1}{(-4x^2-2)+Ce^{2x^2}}}$ où C est une constante réelle.

• ***Exercice 3.3:*** *Déterminer la forme générale de la solution de l'équation différentielle (E3) :*

$$y + (2\sqrt{xy} - x)y' = 0 \qquad \text{(E3)}$$

Solution : On peut écrire l'équation (E3) sous la forme :

$$\frac{y}{x} + (2\sqrt{\frac{y}{x}} - 1)y' = 0$$

Posons : $z = \dfrac{y}{x}$ soit $xz(x) = y(x)$ et $y' = z'x + z$, d'où :

$$\begin{aligned}
z + (2\sqrt{z}-1)(z'x+z) &= 0 \\
z'x(2\sqrt{z}-1) &= -(2z(\sqrt{z})) \\
\frac{(2\sqrt{z}-1)dz}{dx} &= -\frac{2z\sqrt{z}}{x} \\
\frac{(2\sqrt{z}-1)dz}{2z\sqrt{z}} &= -\frac{dx}{x} \\
\int\frac{dz}{z} - \int\frac{dz}{2z\sqrt{z}} &= -\int\frac{dx}{x} \\
\ln|z| + z^{-\frac{1}{2}} &= -\ln|x| + C \\
\ln\left|\frac{y}{x}\right| + \sqrt{\frac{x}{y}} &= -\ln|x| + C
\end{aligned}$$

D'où : $\ln|y| + \sqrt{\dfrac{x}{y}} = C$ où C est une constante réelle.

• ***Exercice 3.4:*** *Déterminer la forme générale de la solution de l'équation différentielle (E4) :*

$$4x^2 + 3xy + y^2 + (4y^2 + 3xy + x^2)y' = 0 \qquad \text{(E4)}$$

Solution : On peut écrire l'équation (E4) sous la forme :

$$x^2\left[4 + 3\frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2 + \left[4\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 3\frac{y}{x} + 1\right]y'\right] = 0$$

Posons : $z = \dfrac{y}{x}$ soit $xz(x) = y(x)$ et $y' = z'x + z$,d'où :

$$\begin{aligned}
4 + 3z + z^2 + (4z^2+3z+1)(z'x+z) &= 0 \\
z'x(4z^2+3z+1) &= -(4+3z+z^2) - z(4z^2+3z+1) \\
(4z^2+3z+1)\frac{dz}{dx} &= -4\frac{z^3+z^2+z+1}{x} \\
(4z^2+3z+1)\frac{dz}{z^3+z^2+z+1} &= -4\frac{dx}{x}
\end{aligned}$$

la décomposition en éléments simples du membre de gauche conduit à (-1 est racine évidente) :

$$\frac{4z^2+3z+1}{z^3+z^2+z+1} = \frac{1}{z+1} + \frac{3z}{z^2+1}$$

d'où

$$\begin{aligned}
\frac{dz}{z+1} + \frac{3zdz}{z^2+1} &= -4\frac{dx}{x} \\
\ln|z+1| + \frac{3}{2}\ln\left|z^2+1\right| &= -4\ln|x| + K \\
|z+1|\left|z^2+1\right|^{\frac{3}{2}} &= Cx^{-4} \\
(\frac{y}{x}+1)^2(\frac{y^2}{x^2}+1)^3 &= Cx^{-8}
\end{aligned}$$

D'où : $(y+x)^2(y^2+x^2)^3 = C$ où C est une constante réelle.

• ***Exercice 3.5:*** *Déterminer la forme générale de la solution de l'équation différentielle (E5) où k,a et b sont des constantes réelles.*

$$y' + ay = ke^{bx} \tag{E5}$$

Solution : C'est une équation différentielle du premier ordre à coefficients constants. On résoud l'équation homogène, puis on recherchera une solution particulière.

1. **Solution de l'équation homogène** :

$$\begin{aligned}
y_1' + ay_1 &= 0 \\
\frac{dy_1}{dx} &= -ay_1 \\
\frac{dy_1}{y_1} &= -adx
\end{aligned}$$

Les variables sont séparées, on intègre séparément les membres de droite et gauche.

$$\ln|y_1| = -ax + K$$

D'où : $y_1 = Ce^{-ax}$ où C est une constante réelle.

2. **Solution particulière** : on applique la méthode de la variation de la constante. On suppose donc que :

$$y_2 = C(x)e^{-ax}$$
$$y_2' = C'(x)e^{-ax} - aC(x)e^{-ax}$$

En injectant ces relations dans l'équation (E5), nous obtenons :

$$C'(x)e^{-ax} - aC(x)e^{-ax} + aC(x)(e^{-ax}) = ke^{bx}$$

$$C' = ke^{(b+a)x}$$

$$C = \frac{k}{b+a}e^{(b+a)x} + D$$

d'où la solution particulière recherchée (prise pour $D = 0$) :

$$y_2 = \frac{k}{b+a}e^{bx}$$

D'où : $y(x) = Ce^{-ax} + \dfrac{k}{b+a}e^{bx}$ où C est une constante réelle.

- ***Exercice 3.6***: *Déterminer la forme générale de la solution de l'équation différentielle (E6) :*

$$y - (x+1)y' + \frac{2x(2x-1)}{(x+1)^2} = 0 \qquad \text{(E6)}$$

<u>**Solution :**</u> C'est une équation différentielle du premier ordre à coefficients non constants du type

$$A(x)y' + B(x)y = f(x)$$

. On résoud l'équation homogène, puis on recherchera une solution particulière.

1. **Solution de l'équation homogène** :

$$y_1 - (x+1)y_1' = 0$$

$$\frac{dy_1}{y_1} = \frac{dx}{x+1}$$

Les variables sont séparées, on intègre séparément les membres de droite et gauche.

$$y_1 = C(x+1)$$

où C est une constante réelle.

2. **Solution particulière** : on applique la méthode de la variation de la constante. On suppose donc que :

$$y_2 = C(x)(x+1)$$
$$y_2' = C'(x)(x+1) + C(x)$$

En injectant ces relation dans l'équation (E6), nous obtenons :

$$C(x)(x+1) - (x+1)(C'(x)(x+1) + C(x)) = -\frac{2x(2x-1)}{(x+1)^2}$$

d'où

$$C' = \frac{2x(2x-1)}{(x+1)^4}$$

la décomposition en éléments simples du membre de droite conduit à :

$$\frac{2x(2x-1)}{(x+1)^4} = \frac{6}{(x+1)^4} - \frac{10}{(x+1)^3} + \frac{4}{(x+1)^2}$$

D'où :

$$C = -\frac{2}{(x+1)^3} + \frac{5}{(x+1)^2} - \frac{4}{(x+1)} + K$$

et la solution particulière recherchée (prise pour $K = 0$) :

$$y_2 = -\frac{2}{(x+1)^2} + \frac{5}{(x+1)} - 4$$

La **solution générale** de l'équation (E6) est donc :
$y(x) = C(x+1) - \dfrac{2}{(x+1)^2} + \dfrac{5}{(x+1)} - 4$ où C est une constante réelle.

3.2 Equations différentielles d'ordre 2

- **Exercice 3.7:** *Déterminer la forme générale de la solution de l'équation différentielle (E7) :*

$$2y' + xy'' + \frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2} = 0 \tag{E7}$$

<u>**Solution :**</u> y n'intervient pas explicitement dans l'équation, on peut donc poser : $z = y'$ et ramener l'équation du second ordre à une équation différentielle du premier ordre (E'7) :

$$2z + xz' + \frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2} = 0$$

Cette équation est une équation du premier ordre linéaire en z. On résoud l'équation homogène, puis on recherchera une solution particulière.

1. **Solution de l'équation homogène** :

$$2z_1 + xz_1' = 0$$

$$\frac{dz_1}{z_1} = -2\frac{dx}{x}$$

Les variables sont séparées, on intègre séparément les membres de droite et gauche. D'où $z_1 = \dfrac{C}{x^2}$ où C est une constante réelle.

2. **Solution particulière** : on applique la méthode de la variation de la constante. On suppose donc que :

$$z_2 = \frac{C(x)}{x^2}$$

$$z_2' = \frac{C'}{x^2} - 2\frac{C}{x^3}$$

En injectant ces relations dans l'équation (E'7), nous obtenons :

$$2\frac{C(x)}{x^2} + \frac{C'}{x} - 2\frac{C}{x^2} = -\frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$$

d'où

$$C' = -\frac{2x(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$$

la décomposition en éléments simples du membre de droite conduit à :

$$-\frac{2x(1-x^2)}{(x^2+1)^2} = \frac{2x}{x^2+1} - \frac{4x}{(x^2+1)^2}$$

D'où :

$$C' = \frac{2x}{x^2+1} - \frac{4x}{(x^2+1)^2}$$

$$C = \ln\left|x^2+1\right| + \frac{2}{(x^2+1)}$$

d'où la solution particulière recherchée :

$$z_2 = \frac{1}{x^2}\left[\ln\left|x^2+1\right| + \frac{2}{(x^2+1)}\right]$$

La **solution générale** de l'équation (E'7) est donc :
$z(x) = \dfrac{1}{x^2}\left[C + \ln\left|x^2+1\right| + \dfrac{2}{(x^2+1)}\right]$ où C est une constante réelle.

Pour trouver la solution de l'équation (E7), il faut intégrer la relation :

$$y' = \frac{1}{x^2}\left[C + \ln\left|x^2+1\right| + \frac{2}{(x^2+1)}\right]$$

$$y = \int \frac{C}{x^2} + \underbrace{\int \frac{\ln\left|x^2+1\right|}{x^2}}_{I} + \underbrace{\int \frac{2}{x^2(x^2+1)}}_{J}$$

I peut s'intégrer par parties en posant :

$$u = \ln(x^2+1) \quad ; \quad du = \frac{2x}{x^2+1}dx$$

$$dv = \frac{1}{x^2}dx \quad ; \quad v = -\frac{1}{x}$$

$$I = -\frac{\ln(x^2+1)}{x} + \int \frac{2dx}{x^2+1} = -\frac{\ln(x^2+1)}{x} + 2\arctan(x)$$

J s'intégre en décomposant la fraction rationnelle en éléments simples :

$$\frac{2}{x^2(x^2+1)} = \frac{2}{x^2} - \frac{2}{x^2+1}$$

$$J = -\frac{2}{x} - 2\arctan(x)$$

D'où : $y = -\dfrac{2+\ln(x^2+1)}{x} + \dfrac{C}{x} + D$ où C et D sont des constantes réelles.

• ***Exercice 3.8:*** *Déterminer la forme générale de la solution de l'équation différentielle (E8) :*

$$y'' + 4y' + 3y = 6x + 23 \tag{E8}$$

Solution : C'est une équation différentielle du second ordre à coefficients constants. On résoud l'équation homogène, puis on recherchera une solution particulière.

1. **Solution de l'équation homogène** : On suppose une solution du type $y = e^{rx}$, ce qui conduit à l'équation caractéristique :
   $$r^2 + 4r + 3 = 0$$
   Cette équation admet deux racines réelles : $r_1 = -1$ et $r_2 = -3$. La solution peut s'écrire :
   $$y_1 = Ae^{-x} + Be^{-3x}$$
   où A et B sont des constantes réelles.
2. **Solution particulière** : Le second membre est de la forme d'un polynôme de degré 1. On recherche une solution particulière sous la forme : $y_2 = Cx + D$.
   $$y_2' = C \qquad y_2'' = 0$$
   En injectant ces relations dans l'équation (E8), nous obtenons :
   $$\left\{\begin{array}{l} 4C + 3D = 23 \\ 3C = 6 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} C = 2 \\ D = 5 \end{array}\right.$$
   d'où
   $$y_2 = 2x + 5$$

La solution générale de l'équation (E8) est donc :
$y(x) = Ae^{-x} + Be^{-3x} + 2x + 5$ où A et B sont des constantes réelles.

• ***Exercice 3.9***: *Déterminer la solution de l'équation différentielle (E9) :*

$$y'' - 5y' + 6y = (2x+3)e^x \tag{E9}$$

avec comme conditions initiales :

$$\left\{ \begin{array}{l} y(0) = 1 \\ y'(0) = -1 \end{array} \right.$$

<u>Solution</u> : C'est une équation différentielle du second ordre à coefficients constants. On résoud l'équation homogène, puis on recherchera une solution particulière.

1. **Solution de l'équation homogène** : On suppose une solution du type $y = e^{rx}$, ce qui conduit à l'équation caractéristique :
$$r^2 - 5r + 6 = 0$$
Cette équation admet deux racines réelles : $r_1 = 2$ et $r_2 = 3$. La solution peut s'écrire :
$$y_1 = Ae^{2x} + Be^{3x}$$
où A et B sont des constantes réelles.
2. **Solution particulière** : Le second membre est de la forme $P(x)e^{mx}$, avec $m = 1$ et P(x) un polynôme de degré 1. m n'est pas racine de l'équation caractéristique, on recherchera donc une solution particulière du type $y_2 = Q(x)e^{2x}$ avec Q(x) polynome de degré 1, soit :
$$\begin{array}{rcl} y_2 & = & (cx+d)e^x \\ y_2' & = & ((cx+d)+c)e^x \\ y_2'' & = & (cx+d+2c)e^x \end{array}$$
En injectant ces relations dans l'équation (E9), nous obtenons :
$$e^x\left[2cx + 2d - 3c\right] = (2x+3)e^x$$
d'où
$$\left\{ \begin{array}{l} 2c = 2 \\ 2d - 3c = 3 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} c = 1 \\ d = 3 \end{array} \right.$$
d'où :
$$y_2 = (x+3)e^x$$

La solution générale de l'équation (E9) est donc :

$$y(x) = Ae^{2x} + Be^{3x} + (x+3)e^x$$

où A et B sont des constantes réelles.

Déterminons A et B par les conditions aux limites :

$$y'(x) = 2Ae^{2x} + 3Be^{3x} + (x+4)e^x$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y(0) = 1 = A + B + 3 \\ y'(0) = -1 = 2A + 3B + 4 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A = -1 \\ B = -1 \end{array} \right.$$

D'où la fonction recherchée : $y(x) = -e^{2x} - e^{3x} + (x+3)e^x$

• ***Exercice 3.10***: *Déterminer la forme générale de la solution de l'équation différentielle (E10) :*

$$y'' + 3y' + 2y = 8 + 6x + 2\sin(x) \tag{E10}$$

<u>Solution</u> : C'est une équation différentielle du second ordre à coefficients constants. On résoud l'équation homogène, puis on recherchera une solution particulière.

1. **Solution de l'équation homogène** : On suppose une solution du type $y = e^{rx}$, ce qui conduit à l'équation caractéristique :
$$r^2 + 3r + 2 = 0$$
Cette équation admet deux racines réelles : $r_1 = -1$ et $r_2 = -2$. La solution peut s'écrire :
$$y_1 = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x} = Ae^{-x} + Be^{-2x}$$
où A et B sont des constantes réelles.
2. **Solution particulière** : Le second membre est une cominaison linéaire de fonctions de la forme $P(x)$,polynôme de degré 1 et d'une fonction trigonométrique. On recherchera donc une solution particulière du type $y_2 = cx + d + (\alpha\cos(x) + \beta\sin(x))$, soit :
$$y_2' = c - \alpha\sin(x) + \beta\cos(x)$$
$$y_2'' = -\alpha\cos(x) - \beta\sin(x)$$
En injectant ces relations dans l'équation (**??**), nous obtenons :
$$-\alpha\cos(x) - \beta\sin(x) + 3(c - \alpha\sin(x) + \beta\cos(x)) + 2(cx + d + (\alpha\cos(x) + \beta\sin(x)) = 8 + 6x + 2\sin(x)$$
Soit :
$$\left\{\begin{array}{l} 3c + 2d = 8 \\ 2c = 6 \\ \alpha + 3\beta = 0 \\ \beta - 3\alpha = 2 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} c = 3 \\ d = -\dfrac{1}{2} \\ \alpha = -\dfrac{3}{5} \\ \beta = \dfrac{1}{5} \end{array}\right.$$
On obtient donc la solution particulière :
$$y_2 = 3x - \frac{1}{2} - \frac{3}{5}\cos(x) + \frac{1}{5}\sin(x)$$

La solution générale de l'équation(E10) est donc :

$y = Ae^{-x} + Be^{-2x} + 3x - \dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{5}\cos(x) + \dfrac{1}{5}\sin(x)$ où A et B sont des constantes réelles.

- ***Exercice 3.11:*** *Déterminer la forme générale de la solution de l'équation différentielle (E11) :*

$$y'' + 2y' + y = x^2 e^{-x} \tag{E11}$$

Solution : C'est une équation différentielle du second ordre à coefficients constants. On résoud l'équation homogène, puis on recherchera une solution particulière.

1. **Solution de l'équation homogène** : On suppose une solution du type $y = e^{rx}$, ce qui conduit à l'équation caractéristique :
$$r^2 + 2r + 1 = 0$$
Cette équation admet une racine double : $r = -1$. La solution peut s'écrire :
$$y_1 = (A + Bx)e^{-x}$$
où A et B sont des constantes réelles.
2. **Solution particulière** : Le second membre est de la forme $P(x)e^{mx}$, avec $m = -1$ et P(x) un polynôme de degré 2. m est racine double de l'équation caractéristique, on recherchera donc une solution particulière du type $y_2 = Q(x)e^{-x}$ avec Q(x) polynôme de degré $2 + 2 = 4$, soit :
$$\begin{array}{lcl} y_2 & = & Cx^4 e^{-x} \\ y_2' & = & (-Cx^4 + 4x^3 C)e^{-x} \\ y"_2 & = & (Cx^4 - 8x^3 C + 12Cx^2)e^{-x} \end{array}$$

En injectant ces relations dans l'équation (E11), nous obtenons :

$$\begin{array}{rcl}(12Cx^2)e^{-x} & = & x^2e^{-x} \\ C & = & \frac{1}{12}\end{array}$$

d'où :

$$y_2 = \frac{1}{12}x^4e^{-x}$$

La solution générale de l'équation (E11) est donc :

$y(x) = (A + Bx + \frac{1}{12}x^4)e^{-x}$ où A et B sont des constantes réelles.

• ***Exercice 3.12:*** *Déterminer la forme générale de la solution de l'équation différentielle (E12) :*

$$y'' + y = \sin^3(x) \tag{E12}$$

Solution : Linéarisons $\sin^3(x)$

$$\begin{array}{rcl}\sin^3(x) & = & \left(\dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^3 \\ & = & \dfrac{e^{3ix} - 3e^{2ix}e^{-ix} + 3e^{ix}e^{-2ix} - e^{-3ix}}{(2i)^3} \\ & = & -\dfrac{1}{4}\left[\dfrac{e^{3ix} - e^{-3ix}}{(2i)} + 3\dfrac{e^{-ix} - e^{ix}}{(2i)}\right] \\ & = & -\dfrac{1}{4}\sin(3x) + \dfrac{3}{4}\sin(x)\end{array}$$

L'équation (E12) peut s'écrire :

$$y'' + y = -\frac{1}{4}\sin(3x) + \frac{3}{4}\sin(x)$$

C'est une équation différentielle du second ordre à coefficients constants. On résoud l'équation homogène, puis on recherchera une solution particulière.

1. **Solution de l'équation homogène** : On suppose une solution du type $y = e^{rx}$, ce qui conduit à l'équation caractéristique :

$$r^2 + 1 = 0$$

$$\Delta = -4 = (2j)^2$$

Cette équation admet deux racines complexes conjuguées : $r_1 = j$ et $r_2 = -j$. La solution peut s'écrire :

$$y = Ae^{r_1x} + Be^{r_2x} = Ae^{jx} + Be^{-jx}$$

ou

$$y = C\cos(x) + D\sin(x)$$

où C et D sont des constantes réelles.

2. **Solution particulière** : Le second membre est une combinaison linéaire de fonctions trigonométriques. $\sin(x)$ est une fonction génératrice de la solution de l'équation homogène, on recherchera donc une solution particulière du type

$$y_2 = Ax\sin(x) + Bx\cos(x) + \beta\sin(3x) + \alpha\cos(3x)$$

soit :

$$y_2' = Ax\cos(x) + A\sin(x) - Bx\sin(x) + B\cos(x) + 3\beta\cos(3x) - 3\alpha\sin(3x)$$

$$y_2'' = -Ax\sin(x) + 2A\cos(x) - Bx\cos(x) - 2B\sin(x) - 9\beta\sin(3x) - 9\alpha\cos(3x)$$

En injectant ces relations dans l'équation (E12), nous obtenons :

$$2A\cos(x) - 2B\sin(x) - 8\alpha\cos(3x) - 8\beta\sin(3x) = -\frac{1}{4}\sin(3x) + \frac{3}{4}\sin(x)$$

Soit :

$$\left\{\begin{array}{l} A = 0 \\ -2B = \dfrac{3}{4} \\ \alpha = 0 \\ -8\beta = -\dfrac{1}{4} \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} A = 0 \\ B = -\dfrac{3}{8} \\ \alpha = 0 \\ \beta = \dfrac{1}{32} \end{array}\right.$$

On obtient donc la solution particulière :

$$y_2 = -\frac{3}{8}x\cos(x) + \frac{1}{32}\sin(3x)$$

La solution générale de l'équation (E12) est donc :

$y = C\cos(x) + D\sin(x) - \dfrac{3}{8}x\cos(x) + \dfrac{1}{32}\sin(3x)$ où C et D sont des constantes réelles.