INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE TOULOUSE

MATHS Rappels
Equations Différentielles
Série 2

Pascal Floquet
Xuân Meyer
Jean-Claude Satge

Première Année à Distance

Septembre 2008

Chapitre 3

Equations Différentielles

3.1 Equations différentielles d'ordre 1

- **Exercice 3.1**: *Déterminer la forme générale de la solution de l'équation différentielle (E1) :*

$$y' + \frac{1+y^3}{xy^2(1+x^2)} = 0$$

▶ ***Indication :*** équation à variables séparables.

Solution : $y = \sqrt[3]{C\frac{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}{x^3} - 1}$ où C est une constante réelle.

- **Exercice 3.2**: *Déterminer la forme générale de la solution de l'équation différentielle (E2) :*

$$xy' - y = y^3$$

▶ ***Indication :*** équation à variables séparables.

Solution : $y = \sqrt{\frac{\lambda x^2}{(1-\lambda x^2)}}$ où λ est une constante réelle.

- **Exercice 3.3**: *Déterminer la forme générale de la solution de l'équation différentielle (E3) :*

$$2xyy' = x^2 - y^2$$

▶ ***Indication :*** Effectuer le changement de variable $z = \frac{y}{x}$ et séparer les variables.

Solution : $y = \sqrt{\frac{\lambda + x^3}{3x}}$ où λ est une constante réelle.

- **Exercice 3.4**: *Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E4) :*

$$4x + y + (x-2y)y' = 0$$

▶ ***Indication :*** Effectuer le changement de variable $z = \frac{y}{x}$ et séparer les variables.

Solution : $xy - y^2 + 2x^2 = A$ où A est une constante réelle.

- **Exercice 3.5**: *Déterminer la solution de l'équation différentielle (E5) :*

$$y' + 2y = e^{-\frac{x}{3}}$$

avec la condition : $y(0) = 2$

▶ ***Indication :*** C'est une équation différentielle du premier ordre à coefficients constants. On résoud l'équation homogène, puis on recherchera une solution particulière en appliquant la méthode de la variation de la constante .

Solution : $y(x) = \left(\frac{3}{5}e^{\frac{5}{3}x} + \frac{7}{5}\right)e^{-2x}$

• ***Exercice 3.6:*** *Déterminer la forme générale de la solution de l'équation différentielle (E6) :*

$$y' - \frac{2xy}{x^2+1} = 1$$

▶ ***Indication :*** C'est une équation différentielle du premier ordre à coefficients non constants du type

$$A(x)y' + B(x)y = f(x)$$

On résoud l'équation homogène, puis on recherchera une solution particulière en appliquant la méthode de la variation de la constante .

Solution : $y(x) = [\arctan(x) + C]\,(x^2+1)$ où C est une constante réelle.

• ***Exercice 3.7:*** *Déterminer la forme générale de la solution de l'équation différentielle (E7) :*

$$y' + y\cos(x) = \frac{1}{2}\sin(2x)$$

▶ ***Indication :*** C'est une équation différentielle du premier ordre à coefficients non constants du type

$$A(x)y' + B(x)y = f(x)$$

. On résoud l'équation homogène, puis on recherchera une solution particulière en factorisant $\sin(2x)$ et en intégrant par partie.

Solution : $y(x) = Ce^{-\sin(x)} + \sin(x) - 1$ où C est une constante réelle.

3.2 Equations différentielles d'ordre 2

• ***Exercice 3.8:*** *Déterminer la forme générale de la solution de l'équation différentielle (E8) :*

$$y'' - 2y' + 2y = 0$$

▶ ***Indication :*** C'est une équation différentielle homogène du second ordre à coefficients constants.

Solution : $y = e^x\,(C\cos(x) + D\sin(x))$ où C et D sont des constantes réelles.

• ***Exercice 3.9:*** *Déterminer la forme générale de la solution de l'équation différentielle (E9) :*

$$y'' - y' + y = e^{2x}$$

▶ ***Indication :*** C'est une équation différentielle du second ordre à coefficients constants. On résoud l'équation homogène, puis on recherchera une solution particulière.On recherchera donc une solution particulière du type $y_2 = Ae^{2x}$.

Solution : $y(x) = e^{\frac{1}{2}x}\left(C\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}x) + D\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}x)\right) + \frac{1}{3}e^{2x}$ où C et D sont des constantes réelles.

• ***Exercice 3.10:*** *Déterminer la forme générale de la solution de l'équation différentielle (E10) :*

$$y'' + 4y = 1$$

▶ ***Indication :*** C'est une équation différentielle du second ordre à coefficients constants. On résoud l'équation homogène, puis on recherchera une solution particulière.On recherchera donc une solution particulière du type $y_2 = A$.

Solution : $y = C\cos(2x) + D\sin(2x) + \frac{1}{4}$ où C et D sont des constantes réelles.

• ***Exercice 3.11*:** *Déterminer la forme générale de la solution de l'équation différentielle (E11) :*

$$y'' - 4y' = xe^{2x}$$

▶ ***Indication :*** C'est une équation différentielle du second ordre à coefficients constants. On résoud l'équation homogène, puis on recherchera une solution particulière.On recherchera donc une solution particulière du type $y_2 = Q(x)e^{2x}$ avec Q(x) polynome de degré 1.

Solution : $y(x) = A + Be^{4x} - \dfrac{1}{4}xe^{2x}$ où A et B sont des constantes réelles.

• ***Exercice 3.12*:** *Déterminer la forme générale de la solution de l'équation différentielle (E12) :*

$$xy'' + 2y' = 4\ln(x)$$

▶ ***Indication :*** C'est une équation différentielle du second ordre à coefficients **non** constants.y n'intervient pas explicitement dans l'équation, on peut donc par le changement de variable $z = y'$ se ramener à la résolution d'une équation différentielle du premier ordre.

Solution : $y = x(2\ln(x) - 1) - \dfrac{C}{x} + 2 + K$ où C et K sont des constantes réelles.

• ***Exercice 3.13*:** *Déterminer la forme générale de la solution de l'équation différentielle (E13) :*

$$y'' - 4y = 4e^{-2x}$$

▶ ***Indication :*** C'est une équation différentielle du second ordre à coefficients constants. On résoud l'équation homogène, puis on recherchera une solution particulière.On recherchera donc une solution particulière du type $y_2 = Cxe^{-2x}$.

Solution : $y = Ae^{2x} + (B - x)e^{-2x}$ où A et B sont des constantes réelles.

• ***Exercice 3.14*:** *Déterminer la forme générale de la solution de l'équation différentielle (E14) :*

$$y'' - 3y' + 2y = xe^{2x} + \sin(x)$$

▶ ***Indication :*** :C'est une équation différentielle du second ordre à coefficients constants. On résoud l'équation homogène, puis on recherchera une solution particulière. On recherchera donc une solution particulière du type $y_2 = (C_1x^2 + C_2x + C_3)e^{2x} + (\alpha\cos(x) + \beta\sin(x))$.

Solution : $y = Ae^{x} + (\dfrac{1}{2}x^2 - x + B)e^{2x} + (\dfrac{3}{10}\cos(x) + \dfrac{1}{10}\sin(x))$ où A et B sont des constantes réelles.

• ***Exercice 3.15*:** *Déterminer la forme générale de la solution de l'équation différentielle (E15)* :

$$y'' - 3y' + 2y = 2x^2 + 3e^{2x}$$

▶ ***Indication :*** C'est une équation différentielle du second ordre à coefficients constants. On résoud l'équation homogène, puis on recherchera une solution particulière. On recherchera donc une solution particulière du type $y_2 = Dxe^{2x} + C_1x^2 + C_2x + C_3$.

Solution : $y = Ae^{x} + (B + 3x)e^{2x} + x^2 + 3x + \dfrac{7}{2}$ où A et B sont des constantes réelles.

- **Exercice 3.16**: *Déterminer la forme générale de la solution de l'équation différentielle (E16) :*

$$y'' + y = \sin^2(x)$$

▶ ***Indication :*** C'est une équation différentielle du second ordre à coefficients constants. On résoud l'équation homogène, puis on recherchera une solution particulière. Linéariser $sin^2(x)$ et chercher une solution particulière du type $y_2 = D + C_1 cos(2x) + C_2 sin(2x)$.

Solution : $y = C\cos(x) + D\sin(x) + \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\cos(2x))$ où C et D sont des constantes réelles.

- **Exercice 3.17**: *Déterminer la forme générale de la solution de l'équation différentielle (E17) :*

$$y'' + 4y' + 4y = 3e^{-2x}$$

▶ ***Indication :*** C'est une équation différentielle du second ordre à coefficients constants. On résoud l'équation homogène, puis on recherchera une solution particulière.$r = -2$ est racine double de l'équation caractéristique, on cherche une solution du type $(Ax^2 + Bx + C)e^{-2x}$.

Solution : $y = (Ax + B + \frac{3}{2}x^2)e^{-2x}$ où A et B sont des constantes réelles.