INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE TOULOUSE

MATHS Rappels
Intégration
Série 1 : énoncés et corrections

Pascal Floquet
Xuân Meyer
Jean-Claude Satge

Première Année à Distance

Septembre 2006

Chapitre 2

Intégration : série 1

2.1 Intégration par parties

- ***Exercice 2.1:*** Calculer :

$$I = \int_0^1 x^2 \ln(x^2+1)dx$$

Solution

On pose $\begin{cases} u(x) = \ln(x^2+1) \\ v'(x) = x^2 \end{cases}$ d'où $\begin{cases} u'(x) = \dfrac{2x}{x^2+1} \\ v(x) = \dfrac{x^3}{3} \end{cases}$

On obtient :

$$I = \left[\frac{x^3}{3}\ln(x^2+1)\right]_0^1 - \frac{2}{3}\int_0^1 \frac{x^4}{x^2+1}dx$$

On effectue la division de x^4 par $x^2 + 1$.
On obtient : $x^4 = (x^2+1)(x^2-1)+1$ Donc

$$I = \frac{\ln 2}{3} - \frac{2}{3}\int_0^1 \left(x^2 - 1 + \frac{1}{x^2+1}\right)dx$$

Et donc :

$$I = \frac{\ln 2}{3} - \frac{2}{3}\left[\frac{x^2}{3} - x + Arc\tan x\right]_0^1 = \frac{\ln 2}{3} + \frac{4}{9} - \frac{\pi}{6}$$

- ***Exercice 2.2:*** Pour tout entier naturel n, on pose :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x^n \cos 2x dx$$

1. Sans calculer I_n montrer que la suite $(I_n)_{n\in N}$ est monotone et comparer I_n et $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} x^n dx$. Calculer la limite de la suite (I_n).
2. Calculer I_0 et I_1. Exprimer I_{n+2} en fonction de I_n et de n

Solution

1. On a : $I_{n+1} - I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} x^n(x-1)\cos 2x dx$.

   On sait que $0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{4} < 1$, et donc $x \geq 0$, $\cos 2x \geq 0$ et $x - 1 < 0$.

   Par conséquent : $x^n(x-1)\cos 2x \leq 0$, et donc $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} x^n(x-1)\cos 2x dx \leq 0$.

   On en déduit que : $I_{n+1} - I_n \leq 0$, la suite (I_n) est donc décroissante.
   $\forall x \in \left[0; \dfrac{\pi}{4}\right]$, $0 \leq \cos 2x \leq 1$ d'où : $0 \leq x^n \cos 2x \leq x^n$

   On en déduit $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} 0dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} x^n \cos 2x dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} x^n dx$

et donc $0 \leq I_n \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} x^n dx$
A partir du résultat précédent, on peut écrire :

$$0 \leq I_n \leq \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

et donc :

$$0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{n+1}$$

On a donc $0 \leq \lim_{n\to+\infty} I_n \leq \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{n+1}$ d'où $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$

2. *Calcul de I_0 et de I_1*

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx = \left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}$$

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x\cos 2x dx = \left[\frac{x}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x dx = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}$$

Pour obtenir I_{n+2} en fonction de I_n il faut effectuer deux intégrations par parties successives :

$$I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x^{n+2}\cos 2x dx = \left[\frac{x^{n+2}}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{n+2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} x^{n+1}\sin 2x dx$$

et

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} x^{n+1}\sin 2x dx = \left[-\frac{x^{n+1}}{2}\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{n+1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} x^n \cos 2x dx$$

On obtient finalement :

$$I_{n+2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{n+2} - \frac{(n+1)(n+2)}{4} I_n$$

2.2 Intégration par changement de variable

- ***Exercice 2.3:*** Calculer l'intégrale définie suivante :

$$I_1 = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^{-x}} dx$$

Solution
On pose $e^x = t$, on a : $dt = e^x dx$
Valeurs aux bornes : x varie de 0 à 1, donc t varie de $e^0 = 1$ à $e^1 = e$
I_1 s'écrit :

$$I_1 = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{dt}{1+\frac{1}{t}} = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{t}{t+1} dt = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{t+1-1}{t+1} dt$$

D'où :

$$I_1 = \int_1^{\mathrm{e}} dt - \int_1^{\mathrm{e}} \frac{dt}{t+1} = [t]_1^{\mathrm{e}} - [\ln(t+1)]_1^{\mathrm{e}} = \mathrm{e} - 1 - \ln\frac{1+\mathrm{e}}{2}$$

- ***Exercice 2.4:*** Calculer l'intégrale définie suivante :

$$I_2 = \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-t^2} dt$$

Solution
On pose $t = \sin u$, $u \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ (l'existence du groupement $1-t^2$ peut le suggérer)
On a : $dt = \cos u\, du$
On obtient : $\sqrt{1-t^2} = \sqrt{1-\sin^2 u} = \sqrt{\cos^2 u}$
Or pour tout $u \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, $\cos u \geq 0$ et donc $\sqrt{1-t^2} = \cos u$

Valeurs aux bornes : t varie de 0 à $\dfrac{1}{2}$, donc u varie de 0 à $\dfrac{\pi}{6}$
D'où

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 u du = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1+\cos 2u}{2} du = \left[\frac{1}{2}u + \frac{\sin 2u}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{8}$$

• ***Exercice 2.5*****:** Calculer l'intégrale définie suivante :

$$I_3 = \int_0^3 \frac{dt}{\sqrt{1+\sqrt{1+\mathrm{t}}}}$$

Solution
On pose : $u = \sqrt{1+t} \Leftrightarrow u^2 = 1+t$
On obtient : $2udu = dt$
Valeurs aux bornes : t varie de 0 à 3 donc u varie de 1 à 2 .
On a : $\dfrac{1}{\sqrt{1+\sqrt{1+t}}} dt = \dfrac{2udu}{\sqrt{1+u}}$
d'où :

$$I_2 = \int_0^2 \frac{2udu}{\sqrt{1+\mathrm{u}}}$$

Réutilisons un changement de variable (le même que le précédent convient).
On pose : $v = \sqrt{1+u} \Leftrightarrow v^2 = 1+u$
On obtient : $2vdv = du$
u varie de 1 à 2 donc v varie de $\sqrt{2}$à $\sqrt{3}$.
On a : $\dfrac{2udu}{\sqrt{1+\mathrm{u}}} = \dfrac{2\left(v^2-1\right)2vdv}{v} = 4\left(v^2-1\right)dv$
d'où

$$I_3 = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} 4\left(v^2-1\right)dv = 4\left[\frac{v^3}{3} - v\right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

• ***Exercice 2.6*****:** Calculer l'intégrale définie suivante :

$$I_4 = \int_{-1}^0 \frac{x-1}{x^2+x+1} dx$$

Solution
On écrit x^2+x+1 sous forme canonique.
On obtient : $x^2+x+1 = \left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4}$
que l'on écrit sous la forme : $x^2+x+1 = \dfrac{3}{4}\left[\left[\dfrac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\dfrac{1}{2}\right)\right]^2 + 1\right]$
On pose $t = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\dfrac{1}{2}\right) \Leftrightarrow x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}t - \dfrac{1}{2}$
On obtient : $dx = \dfrac{\sqrt{3}}{2}dt$
Valeurs aux bornes : x varie de -1 à 0, donc t varie de $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ à $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$
On obtient $\dfrac{x-1}{x^2+x+1}dx = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{3}{2}}{\frac{3}{4}(t^2+1)} \times \dfrac{\sqrt{3}}{2}dt$
donc

$$I_4 = \int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{t-\sqrt{3}}{(t^2+1)} dt = \int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{t}{(t^2+1)} dt - \int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{\sqrt{3}}{(t^2+1)} dt$$

Enfin :

$$I_4 = \left[\frac{1}{2}\ln(t^2+1)\right]_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} - \left[\sqrt{3}Arc\tan t\right]_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} = 0 - \sqrt{3}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\pi\sqrt{3}}{3}$$

• ***Exercice 2.7*****:** Calculer l'intégrale définie suivante :

$$I_5 = \int_{-6}^{-2} \frac{dt}{\sqrt{28-12t-t^2}}$$

Solution
On écrit $28-12t-t^2$ sous forme canonique : $28-12t-t^2=-(t+6)^2+64$
On obtient :

$$I_5=\int_{-6}^{-2}\frac{dt}{\sqrt{28-12t-t^2}}=\int_{-6}^{-2}\frac{dt}{\sqrt{64-(t+6)^2}}$$

On pose : $t+6=8u$
On obtient : $dt=8du$
Valeurs aux bornes : t varie de -6 à -2, donc u varie de 0 à $\frac{1}{2}$
Finalement, on obtient :

$$I_5=\int_{-6}^{-2}\frac{dt}{\sqrt{64-(t+6)^2}}=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{8du}{8\sqrt{1-u^2}}=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}=[Arc\sin u]_0^{\frac{1}{2}}=\frac{\pi}{6}$$

2.3 Décomposition en éléments simples

- ***Exercice 2.8:*** Calculer les intégrales définies suivantes :

$$J_1=\int_0^1\frac{2x}{(x+2)\,(x+3)}dx \quad ; \quad J_2=\int_2^3\frac{x^2-2}{(x^2+1)\,(x-1)}dx$$

Solution

- *Calcul de* $J_1=\int_0^1\frac{2x}{(x+2)\,(x+3)}dx$

On montre aisément que : $\frac{2x}{(x+2)\,(x+3)}=-\frac{4}{(x+2)}+\frac{6}{(x+3)}$
On obtient :

$$J_1=\int_0^1\frac{2x}{(x+2)\,(x+3)}dx=\int_0^1\frac{-4}{(x+2)}+\frac{6}{(x+3)}dx=[-4\ln|x+2|+6\ln|x+3|]_0^1$$

Finalement :

$$J_1=6\ln\frac{4}{3}+4\ln\frac{2}{3}$$

- *Calcul de* $J_2=\int_2^3\frac{x^2-2}{(x^2+1)\,(x-1)}dx$

On doit avoir : $\frac{x^2-2}{(x^2+1)\,(x-1)}=\frac{ax+b}{(x^2+1)}+\frac{c}{(x-1)}$, a, b et c étant des réels que l'on peut trouver par identification.
On obtient : $\frac{x^2-2}{(x^2+1)\,(x-1)}=\frac{3}{2}\times\frac{x+1}{(x^2+1)}-\frac{1}{2\,(x-1)}$
J_2 s'écrit :

$$J_2=\int_2^3\frac{x^2-2}{(x^2+1)\,(x-1)}dx=\frac{3}{2}\int_2^3\frac{x+1}{(x^2+1)}dx-\frac{1}{2}\int_2^3\frac{dx}{(x-1)}$$

Donc :

$$J_2=\frac{3}{2}\int_2^3\frac{x}{(x^2+1)}dx+\frac{3}{2}\int_2^3\frac{1}{(x^2+1)}dx-\frac{1}{2}\int_2^3\frac{1}{(x-1)}dx$$

Et donc :

$$J_2=\left[\frac{3}{4}\ln\left(x^2+1\right)+\frac{3}{2}Arc\tan x-\frac{1}{2}\ln|x-1|\right]_2^3$$

- ***Exercice 2.9:*** Calculer les primitives suivantes :

1. $\int\frac{dx}{\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^x-2}$
2. $\int\frac{\cos^3 x}{1-2\sin x}dx$

Solution

1. On pose $u = \mathrm{e}^x$, et donc $dx = \dfrac{du}{u}$

   On obtient : $\displaystyle\int \frac{dx}{\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^x - 2} = \int \frac{du}{u(u-1)(u+2)}$

   On décompose la fraction $\dfrac{1}{u(u-1)(u+2)}$ en éléments simples.

   On obtient :
$$\int \frac{du}{u(u-1)(u+2)} = \int \left(-\frac{1}{2u} + \frac{1}{3(u-1)} + \frac{1}{6(u+2)}\right) du$$

   Donc
$$\int \frac{du}{u(u-1)(u+2)} = -\frac{1}{2}\ln u + \frac{1}{3}\ln|u-1| + \frac{1}{6}\ln|u+2| + C$$

   Finalement
$$\int \frac{dx}{\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^x - 2} = -\frac{x}{2} + \frac{1}{3}\ln|\mathrm{e}^x - 1| + \frac{1}{6}\ln(\mathrm{e}^x + 2) + C$$

2. Si l'on remplace x par $\pi - x$, l'intégrande change de signe, on pose $u = \sin x$ et donc $du = \cos x dx$

   On obtient $\displaystyle\int \frac{\cos^3 x}{1 - 2\sin x} dx = \int \frac{1-u^2}{1-2u} du$

   On décompose la fraction $\dfrac{1-u^2}{1-2u}$ en éléments simples.

   On obtient :
$$\int \frac{1-u^2}{1-2u} du = \int \left(\frac{u}{2} + \frac{1}{4} - \frac{3}{4(2u-1)}\right) du = \frac{u^2+u}{4} - \frac{3}{8}\ln|2u-1| + C$$

   Finalement :
$$\int \frac{\cos^3 x}{1-2\sin x} dx = \frac{\sin^2 x + \sin x}{4} - \frac{3}{8}\ln|2\sin x - 1| + C$$

2.4 Complément

On peut intégrer sur un intervalle fermé sur lequel f n'est pas continue.

Voici un exemple : calculons, si cela est possible, $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx$

Cette intégrale n'est pas définie au point 1.
On calcule la limite quand a tend vers 1 de $\displaystyle\int_0^a \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx$. Si cette limite existe, ce sera la valeur donnée à cette intégrale.
Or :
$$\int_0^a \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx = \left[-2\sqrt{1-x}\right]_0^a = 2\left(1 - \sqrt{1-a}\right)$$
et
$$\lim_{a \to 1} 2\left(1 - \sqrt{1-a}\right) = 2$$
Donc
$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx = 2$$