INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE TOULOUSE

MATHS Rappels
Equations Différentielles
Correction de la Série 2

Jean-Pierre Bourgade
Pascal Floquet
Xuân Meyer

Première Année à Distance

Septembre 2011

Chapitre 3

Equations Différentielles : correction de la série 2

3.1 Equations différentielles d'ordre 1

• **Exercice 3.1:** *Déterminer la forme générale de la solution de l'équation différentielle (E1) :*

$$y' + \frac{1+y^3}{xy^2(1+x^2)} = 0 \tag{E1}$$

Solution : On peut écrire l'équation (E1) sous la forme :

$$\frac{y^2dy}{1+y^3} = -\frac{dx}{x(1+x^2)}$$

Les variables sont séparées, on intègre séparément les membres de droite et gauche, soit :

$$\int \frac{y^2dy}{1+y^3} = -\int \frac{dx}{x(1+x^2)}$$

Pour le membre de droite, une décomposition en éléments simples donne :

$$\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{(1+x^2)}$$

d'où

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{3}\frac{d(1+y^3)}{1+y^3} &= -\int \frac{dx}{x} + \int \frac{xdx}{(1+x^2)} \\
\frac{1}{3}\ln\left|1+y^3\right| &= -\ln|x| + \frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right| + K \\
\ln\left(\left|1+y^3\right|\right)^{\frac{1}{3}} &= \ln\left|x^{-1}\right| + \ln\left|1+x^2\right|^{\frac{1}{2}} + K \\
\ln\left(\left|1+y^3\right|\right)^{\frac{1}{3}} &= \ln\left[\frac{C\left|1+x^2\right|^{\frac{1}{2}}}{|x|}\right] \\
\left|1+y^3\right|^{\frac{1}{3}} &= C\frac{\left|1+x^2\right|^{\frac{1}{2}}}{|x|} \\
(1+y^3) &= C\frac{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}{x^3}
\end{aligned}$$

D'où : $y = \sqrt[3]{C\frac{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}{x^3} - 1}$ où C est une constante réelle.

• ***Exercice 3.2***: *Déterminer la forme générale de la solution de l'équation différentielle (E2) :*

$$xy' - y = y^3 \tag{E2}$$

Solution : On peut écrire l'équation (E2) sous la forme :

$$\frac{dy}{y(1+y^2)} = \frac{dx}{x}$$

Les variables sont séparées, on intègre séparément les membres de droite et gauche. Pour le membre de gauche, une décomposition en éléments simples donne :

$$\frac{1}{y(1+y^2)} = \frac{1}{y} - \frac{y}{(1+y^2)}$$

d'où

$$\begin{aligned}
\int \frac{dy}{y} - \int \frac{ydy}{(1+y^2)} &= \int \frac{dx}{x} \\
\ln|y| - \frac{1}{2}\ln\left|1+y^2\right| &= \ln|x| + K \\
\ln\left[\frac{|y|}{|1+y^2|^{\frac{1}{2}}}\right] &= \ln\left[C\,|x|\right] \\
\frac{y}{(1+y^2)^{\frac{1}{2}}} &= Cx \\
\frac{y^2}{(1+y^2)} &= \lambda x^2 \\
y^2(1-\lambda x^2) = \lambda x^2 &
\end{aligned}$$

D'où $y = \sqrt{\dfrac{\lambda x^2}{(1-\lambda x^2)}}$ où λ est une constante réelle.

• ***Exercice 3.3***: *Déterminer la forme générale de la solution de l'équation différentielle (E3) :*

$$2xyy' = x^2 - y^2 \tag{E3}$$

Solution :
Pour $x \neq 0$, on peut écrire l'équation (E3) sous la forme :

$$2x^2\frac{y}{x}y' = x^2\left(1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2\right)$$

soit :

$$2\frac{y}{x}y' = \left(1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2\right)$$

Posons : $z = \dfrac{y}{x}$ soit $xz(x) = y(x)$ et $y' = z'x + z$,d'où :

$$\begin{aligned}
2z(z'x+z) &= 1 - z^2 \\
2zz'x + 3z^2 - 1 &= 0 \\
\frac{2zdz}{3z^2-1} &= -\frac{dx}{x}
\end{aligned}$$

Les variables sont séparées, on intègre séparément les membres de droite et gauche.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3}\frac{d(3z^2-1)}{3z^2-1} &= -\frac{dx}{x} \\
\frac{1}{3}\ln\left|3z^2-1\right| &= -\ln|x| + K
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ln\left(\left|3z^2-1\right|^{\frac{1}{3}}\right) &= \ln\left|\frac{C}{x}\right| \\
\left(3z^2-1\right)^{\frac{1}{3}} &= \frac{C}{x} \\
3z^2-1 &= \frac{\lambda}{x^3} \\
3z^2 &= \frac{\lambda}{x^3}+1 \\
3y^2 &= x^2\frac{\lambda+x^3}{x^3}
\end{aligned}$$

D'où $y=\sqrt{\dfrac{\lambda+x^3}{3x}}$ où λ est une constante réelle.

• ***Exercice 3.4***: *Déterminer la forme générale de la solution de l'équation différentielle (E4) :*

$$4x+y+(x-2y)y'=0 \tag{E4}$$

Solution : On peut écrire l'équation (E4) sous la forme :

$$\left(4+\frac{y}{x}\right)+\left(1-2\frac{y}{x}\right)y'=0$$

Posons : $z=\dfrac{y}{x}$ soit $xz(x)=y(x)$ et $y'=z'x+z$,d'où :

$$\begin{aligned}
4+z+(1-2z)(xz'+z)1 &= 0 \\
(1-2z)xz'-2z^2+2z+4 &= 0 \\
(1-2z)x\frac{dz}{dx} &= 2(z^2-z-2) \\
\frac{(1-2z)dz}{2(z^2-z-2)} &= \frac{dx}{x}
\end{aligned}$$

Les variables sont séparées, on intègre séparément les membres de droites et gauche.

$$\begin{aligned}
\int\frac{(1-2z)dz}{2(z^2-z-2)} &= \int\frac{dx}{x} \\
-\frac{1}{2}\int\frac{d(z^2-z-2)}{(z^2-z-2)} &= \int\frac{dx}{x} \\
-\frac{1}{2}\ln\left|z^2-z-2\right| &= \ln|x|+K \\
\left|z^2-z-2\right|^{-\dfrac{1}{2}} &= Cx \\
z^2-z-2 &= \frac{\lambda}{x^2} \\
\frac{y^2}{x^2}-\frac{y}{x}-2 &= \frac{\lambda}{x^2}
\end{aligned}$$

D'où : $y^2-xy-2x^2=\lambda$ où λ est une constante réelle, solution que l'on peut également écrire sous la forme :

$$y=\frac{x}{2}\pm\frac{3}{2}\sqrt{x^2+K}$$

où K est une constante réelle.

- ***Exercice 3.5:*** *Déterminer la solution de l'équation différentielle (E5) :*

$$y' + 2y = e^{-\frac{x}{3}} \tag{E5}$$

avec la condition : $y(0) = 2$

<u>**Solution**</u> **:** C'est une équation différentielle du premier ordre à coefficients constants. On résoud l'équation homogène, puis on recherchera une solution particulière.

1. **Solution de l'équation homogène** :

$$y_1' + 2y_1 = 0$$
$$\frac{dy_1}{dx} = -2y_1$$
$$\frac{dy_1}{y_1} = -2dx$$

   Les variables sont séparées, on intègre séparément les membres de droite et gauche.

$$\ln|y_1| = -2x + K$$
$$y_1 = Ce^{-2x}$$

   où C est une constante réelle.

2. **Solution particulière** : on applique la méthode de la variation de la constante. On suppose donc que :

$$y_2 = C(x)e^{-2x}$$
$$y_2' = C'(x)e^{-2x} - 2C(x)e^{-2x}$$

   En injectant ces relations dans l'équation (E5), nous obtenons :

$$C'(x)e^{-2x} - 2C(x)e^{-2x} + 2C(x)e^{-2x} = e^{-\frac{x}{3}}$$

   d'où

$$C' = e^{-\frac{x}{3}+2x}$$

   soit

$$C = \frac{3}{5}e^{\frac{5}{3}x} + K$$

   d'où la solution particulière recherchée (prise pour $K = 0$) :

$$y_2 = \left(\frac{3}{5}e^{\frac{5}{3}x}\right)e^{-2x}$$

La solution générale de l'équation (E5) est donc :

$$y(x) = \left(\frac{3}{5}e^{\frac{5}{3}x} + C\right)e^{-2x}$$

où C est une constante réelle.
Identifions cette constante pour que la condition au limite soit satisfaite.

$$y(0) = \left(\frac{3}{5} + C\right) = 2$$

D'où

$$C = 2 - \frac{3}{5} = \frac{7}{5}$$

La solution recherchée est donc :

$$y(x) = \left(\frac{3}{5}e^{\frac{5}{3}x} + \frac{7}{5}\right)e^{-2x}$$

• ***Exercice 3.6***: *Déterminer la forme générale de la solution de l'équation différentielle (E6) :*

$$y' - \frac{2xy}{x^2+1} = 1 \tag{E6}$$

<u>**Solution :**</u> On peut écrire l'équation (E5) sous la forme :

$$(x^2+1)y' - 2xy = x^2+1$$

C'est une équation différentielle du premier ordre à coefficients non constants du type

$$A(x)y' + B(x)y = f(x)$$

On résoud l'équation homogène, puis on recherchera une solution particulière.

1. **Solution de l'équation homogène** :

$$(x^2+1)y_1' - 2xy_1 = 0$$

$$(x^2+1)\frac{dy_1}{dx} = 2xy_1$$

$$\frac{dy_1}{y_1} = \frac{2xdx}{x^2+1}$$

Les variables sont séparées, on intègre séparément les membres de droite et gauche.

$$\ln|y_1| = \ln\left|x^2+1\right| + K$$

$$y_1 = C(x^2+1)$$

où C est une constante réelle.

2. **Solution particulière** : on applique la méthode de la variation de la constante. On suppose donc que :

$$y_2 = C(x)(x^2+1)$$

$$y_2' = C'(x)(x^2+1) + 2xC(x)$$

En injectant ces relations dans l'équation (E6), nous obtenons :

$$(x^2+1)^2C' + 2x(x^2+1)C - 2x(x^2+1)C = x^2+1$$

d'où

$$C' = \frac{1}{x^2+1}$$

soit

$$C = \arctan(x) + K$$

d'où la solution particulière recherchée (prise pour $K = 0$) :

$$y_2 = (x^2+1)\arctan(x)$$

La **solution générale** de l'équation (E6) est donc :

$$y(x) = [\arctan(x) + C]\,(x^2+1)$$

où C est une constante réelle.

- ***Exercice 3.7***: *Déterminer la forme générale de la solution de l'équation différentielle (E7) :*

$$y' + y\cos(x) = \frac{1}{2}\sin(2x) \tag{E7}$$

<u>**Solution :**</u> C'est une équation différentielle du premier ordre à coefficients non constants du type

$$A(x)y' + B(x)y = f(x)$$

On résoud l'équation homogène, puis on recherchera une solution particulière.

1. **Solution de l'équation homogène** :

$$y_1' + y_1\cos(x) = 0$$

$$\frac{dy_1}{dx} + y_1\cos(x) = 0$$

$$\frac{dy_1}{y_1} = -\cos(x)dx$$

Les variables sont séparées, on intègre séparément les membres de droite et gauche.

$$\ln|y_1| = -\sin(x) + K$$

$$y_1 = Ce^{-\sin(x)}$$

où C est une constante réelle.

2. **Solution particulière** : on applique la méthode de la variation de la constante. On suppose donc que :

$$y_2 = C(x)(e^{-\sin(x)})$$

$$y_2' = C'(x)(e^{-\sin(x)}) - C(x)(\cos(x)e^{-\sin(x)})$$

En injectant ces relations dans l'équation (E6), nous obtenons :

$$C'(x)(e^{-\sin(x)}) - C(x)(\cos(x)e^{-\sin(x)}) + C(x)(e^{-\sin(x)})\cos(x) = \frac{1}{2}\sin(2x)$$

d'où

$$C' = \frac{1}{2}\sin(2x)e^{\sin(x)}$$

Or, $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$ d'où :

$$C' = \sin(x)\cos(x)e^{\sin(x)}$$

Pour calculer C(x) il faut intégrer par parties : Posons $u = \sin(x)$ et $dv = \cos(x)e^{\sin(x)}$,soit $du = \cos(x)$ et $v = e^{\sin(x)}$. On a alors :

$$C = \int \sin(x)\cos(x)e^{\sin(x)}dx = \sin(x)e^{\sin(x)} - \int \cos(x)e^{\sin(x)}dx$$

$$C = \sin(x)e^{\sin(x)} - e^{\sin(x)}$$

d'où

$$y_2 = \sin(x) - 1$$

La solution générale de l'équation (E7) est donc : $y(x) = Ce^{-\sin(x)} + \sin(x) - 1$ où C est une constante réelle.

3.2 Equations différentielles d'ordre 2

- **Exercice 3.8:** *Déterminer la forme générale de la solution de l'équation différentielle (E8) :*

$$y'' - 2y' + 2y = 0 \tag{E8}$$

Solution : C'est une équation différentielle homogène du second ordre à coefficients constants. On suppose une solution du type $y = e^{rx}$, ce qui conduit à l'équation caractéristique :

$$r^2 - 2r + 2 = 0$$

$$\Delta = (-2)^2 - 4 * 2 = -4 \leq 0$$

$$\Delta = (2j)^2$$

Cette équation admet deux racines complexes conjuguées :

$$r_1 = \frac{2-2j}{2} = 1 - j$$

et

$$r_2 = \frac{2+2j}{2} = 1 + j$$

La solution peut s'écrire :

$$y = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x} = Ae^{(1-j)x} + Be^{(1+j)x} = e^x(Ae^{(-j)x} + Be^{(j)x})$$

ou

$$y = e^x\,(C\cos(x) + D\sin(x))$$

où C et D sont des constantes réelles.

- **Exercice 3.9:** *Déterminer la forme générale de la solution de l'équation différentielle (E9) :*

$$y'' - y' + y = e^{2x} \tag{E9}$$

Solution : C'est une équation différentielle du second ordre à coefficients constants. On résoud l'équation homogène, puis on recherchera une solution particulière.

1. **Solution de l'équation homogène** : On suppose une solution du type $y = e^{rx}$, ce qui conduit à l'équation caractéristique :

$$r^2 - r + 1 = 0$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4 = -3 \leq 0$$

$$\Delta = (\sqrt{3}j)^2$$

Cette équation admet deux racines complexes conjuguées :

$$r_1 = \frac{1+\sqrt{3}j}{2} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}j$$

et

$$r_2 = \frac{1-\sqrt{3}j}{2} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}j$$

La solution peut s'écrire :

$$y = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x} = Ae^{(\frac{1+\sqrt{3}j}{2})x} + Be^{(\frac{1-\sqrt{3}j}{2})x} = e^{\frac{1}{2}x}(Ae^{(\frac{\sqrt{3}}{2}j)x} + Be^{(-\frac{\sqrt{3}}{2}j)x})$$

ou

$$y = e^{\frac{1}{2}x}\left(C\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}x) + D\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}x)\right)$$

où C et D sont des constantes réelles.

2. **Solution particulière** : Le second membre est de la forme e^{mx}, avec $m = 2$. m n'est pas racine de l'équation caractéristique, on recherchera donc une solution particulière du type $y_2 = Ae^{2x}$.

$$y_2' = 2Ae^{2x}$$

$$y_2'' = 4Ae^{2x}$$

En injectant ces relations dans l'équation (E9), nous obtenons :

$$A = \frac{1}{3}$$

d'où

$$y_2 = \frac{1}{3}e^{2x}$$

La solution générale de l'équation (E9) est donc :
$y(x) = e^{\frac{x}{2}}\left(C\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}x) + D\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}x)\right) + \frac{1}{3}e^{2x}$ où C et D sont des constantes réelles.

- **Exercice 3.10:** *Déterminer la forme générale de la solution de l'équation différentielle (E10) :*

$$y'' + 4y = 1 \tag{E10}$$

<u>**Solution**</u> **:** C'est une équation différentielle du second ordre à coefficients constants. On résoud l'équation homogène, puis on recherchera une solution particulière.

1. **Solution de l'équation homogène** : On suppose une solution du type $y = e^{rx}$, ce qui conduit à l'équation caractéristique :

$$r^2 + 4 = 0$$

$$\Delta = -16 \leq 0$$

$$\Delta = (4j)^2$$

Cette équation admet deux racines complexes conjuguées : $r_1 = 2j$ et $r_2 = -2j$. La solution peut s'écrire :

$$y = Ae^{r_1x} + Be^{r_2x} = Ae^{(2j)x} + Be^{(-2j)x}$$

ou

$$y = C\cos(2x) + D\sin(2x)$$

où C et D sont des constantes réelles.

2. **Solution particulière** : Le second membre est de la forme d'un polynôme de degré 0. On recherchera donc une solution particulière du type $y_2 = A$.

$$y_2' = 0$$

$$y_2'' = 0$$

En injectant ces relations dans l'équation (E10), nous obtenons :

$$y_2 = A = \frac{1}{4}$$

La solution générale de l'équation (E10) est donc :
$y = C\cos(2x) + D\sin(2x) + \frac{1}{4}$ où C et D sont des constantes réelles.

- **Exercice 3.11:** *Déterminer la forme générale de la solution de l'équation différentielle (E11) :*

$$y'' - 4y' = xe^{2x} \tag{E11}$$

<u>**Solution**</u> **:** C'est une équation différentielle du second ordre à coefficients constants. On résoud l'équation homogène, puis on recherchera une solution particulière.

1. **Solution de l'équation homogène** : On suppose une solution du type $y = e^{rx}$, ce qui conduit à l'équation caractéristique :
$$r^2 - 4r = 0$$
Cette équation admet deux racines réelles : $r_1 = 0 =$ et $r_2 = 4$. La solution peut s'écrire :
$$y = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x} = A + Be^{4x}$$
où A et B sont des constantes réelles.
2. **Solution particulière** : Le second membre est de la forme $P(x)e^{mx}$, avec $m = 2$ et P(x) un polynome de degré 1. m n'est pas racine de l'équation caractéristique, on recherchera donc une solution particulière du type $y_2 = Q(x)e^{2x}$ avec Q(x) polynome de degré 1, soit :
$$y_2 = (cx + d)e^{2x}$$
$$y_2' = (2(cx + d) + c)e^{2x}$$
$$y_2' = (4cx + 4d + 4c)e^{2x}$$
En injectant ces relations dans l'équation (E11), nous obtenons :
$$(4cx + 4d + 4c) - 4((2(cx + d) + c)) = x$$
d'où
$$\left\{\begin{array}{l} 4c - 8c = 1 \\ 4d + 4c - 8d - 4c = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} c = -\dfrac{1}{4} \\ d = 0 \end{array}\right.$$
d'où :
$$y_2 = -\frac{1}{4}xe^{2x}$$

La solution générale de l'équation (E11) est donc :
$y(x) = A + Be^{4x} - \dfrac{1}{4}xe^{2x}$ où A et B sont des constantes réelles.

• ***Exercice 3.12*:** *Déterminer la forme générale de la solution de l'équation différentielle (E12) :*
$$xy'' + 2y' = 4\ln(x) \tag{E12}$$

<u>**Solution**</u> **:** C'est une équation différentielle du second ordre à coefficients **non** constants. y n'intervient pas explicitement dans l'équation, on peut donc par le changement de variable $z = y'$ se ramener à la résolution d'une équation différentielle du premier ordre (E12b) :
$$xz' + 2z = 4\ln(x)$$
Cette équation est linéaire à coefficient non constants. On résoud l'équation homogène, puis on recherchera une solution particulière.

1. **Solution de l'équation homogène** :
$$xz_1' + 2z_1 = 0$$
$$x\frac{dz_1}{dx} = -2z_1$$
$$\frac{dz_1}{z_1} = -2\frac{dx}{x}$$
$$z_1 = \frac{C}{x^2}$$
où C est une constante réelle.

2. **Solution particulière** : On applique la méthode de la variation de la constante. On suppose donc une solution particulière du type : $z_2 = \frac{C(x)}{x^2}$

$$z_2' = \frac{C'(x)}{x^2} - 2\frac{C(x)}{x^3}$$

En injectant ces relations l'équation (E12b), on obtient :

$$x\frac{C'(x)}{x^2} - 2\frac{C(x)}{x^2} + 2\frac{C(x)}{x^2} = 4\ln(x)$$

$$\frac{C'(x)}{x} = 4\ln(x)$$

$$C' = 4x\ln(x)$$

On peut intégrer cette différentielle par parties, en posant $u = \ln(x)$ et $dv = 4xdx$. On a alors $du = \frac{dx}{x}$ et $v = 2x^2$.

$$C = \int 4x\ln(x) = 2x^2\ln(x) - \int \frac{2x^2 dx}{x}$$

$$C(x) = 2x^2\ln(x) - x^2$$

d'où

$$z_2(x) = \frac{2x^2\ln(x) - x^2}{x^2} = 2\ln(x) - 1$$

La solution générale de l'équation (E12b) est donc :

$$z(x) = \frac{C}{x^2} + 2\ln(x) - 1$$

On a donc :

$$y'(x) = \frac{C}{x^2} + 2\ln(x) - 1$$

Soit :

$$y = -\frac{C}{x} + 2(x\ln(x) - x) - x + K$$

D'où : $y = x(2\ln(x) - 3) - \dfrac{C}{x} + K$ où C et K sont des constantes réelles.

- ***Exercice 3.13:*** *Déterminer la forme générale de la solution de l'équation différentielle (E13) :*

$$y'' - 4y = 4e^{-2x} \tag{E13}$$

Solution : C'est une équation différentielle du second ordre à coefficients constants. On résoud l'équation homogène, puis on recherchera une solution particulière.

1. **Solution de l'équation homogène** : On suppose une solution du type $y = e^{rx}$, ce qui conduit à l'équation caractéristique :

$$r^2 - 4 = 0$$

Cette équation admet deux racines réelles : $r_1 = 2$ et $r_2 = -2$. La solution peut s'écrire :

$$y = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x} = Ae^{2x} + Be^{-2x}$$

où A et B sont des constantes réelles.

2. **Solution particulière** : Le second membre est de la forme e^{mx}, avec $m = -2$. m est racine de l'équation caractéristique, on recherchera donc une solution particulière du type $y_2 = Cxe^{-2x}$, soit :

$$y_2' = (-2Cx + C)e^{-2x}$$

$$y_2'' = (4Cx - 4C)e^{-2x}$$

En injectant ces relations dans l'équation (E13), nous obtenons :

$$(4Cx - 4C - 4Cx)e^{-2x} = 4e^{-2x}$$

Soit :

$$C = -1$$

$$y_2 = -xe^{-2x}$$

La solution générale de l'équation (E13) est donc :
$y = Ae^{2x} + (B - x)e^{-2x}$ où A et B sont des constantes réelles.

- ***Exercice 3.14*:** *Déterminer la forme générale de la solution de l'équation différentielle (E14) :*

$$y'' - 3y' + 2y = xe^{2x} + \sin(x) \tag{E14}$$

Solution : C'est une équation différentielle du second ordre à coefficients constants. On résoud l'équation homogène, puis on recherchera une solution particulière.

1. **Solution de l'équation homogène** : On suppose une solution du type $y = e^{rx}$, ce qui conduit à l'équation caractéristique :

$$r^2 - 3r + 2 = 0$$

$$\Delta = 9 - 8 = 1$$

Cette équation admet deux racines réelles : $r_1 = 1$ et $r_2 = 2$. La solution peut s'écrire :

$$y = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x} = Ae^x + Be^{2x}$$

où A et B sont des constantes réelles.

2. **Solution particulière** : Le second membre est une cominaison linéaire de fonctions de la forme $P(x)e^{mx}$, avec $m = 2$ et $P(x)$ polynôme de degré 1 et d'une fonction trigonométrique. m étant une racine de l'équation caractéristique, on recherchera donc une solution particulière du type

$$y_2 = (C_1x^2 + C_2x + C_3)e^{2x} + (\alpha\cos(x) + \beta\sin(x))$$

soit :

$$y_2' = (2(C_1x^2 + C_2x + C_3) + 2xC_1 + C_2)e^{2x} - \alpha\sin(x) + \beta\cos(x)$$

$$y_2'' = \left[2(2C_1x^2 + (2C_2 + 2C_1)x + 2C_3 + C_2) + 4C_1x + 2C_+2C_1\right] e^{2x}$$

En injectant ces relations dans l'équation (E14), nous obtenons :

$$(2C_1x + C_2 + 2C_1)\, e^{2x} + \sin(x)(\alpha + 3\beta) + \cos(x)(\beta - 3\alpha) = xe^{2x} + \sin(x)$$

Soit :

$$\left\{\begin{array}{l} 2C_1 = 1 \\ C_2 + 2C_1 = 0 \\ \\ \alpha + 3\beta = 1 \\ \\ \beta - 3\alpha = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} C_1 = \dfrac{1}{2} \\ C_2 = -1 \\ \alpha = \dfrac{3}{10} \\ \beta = \dfrac{1}{10} \end{array}\right.$$

On obtient donc la solution particulière (pour $C_3 = 0$) :$y_2 = (\frac{1}{2}x^2 - x)e^{2x} + (\frac{3}{10}\cos(x) + \frac{1}{10}\sin(x))$

D'où : $y = Ae^x + (\frac{1}{2}x^2 - x + B)e^{2x} + (\frac{3}{10}\cos(x) + \frac{1}{10}\sin(x))$ où A et B sont des constantes réelles.

• ***Exercice 3.15***: *Déterminer la forme générale de la solution de l'équation différentielle (E15) :*

$$y'' - 3y' + 2y = 2x^2 + 3e^{2x} \tag{E15}$$

<u>**Solution :**</u> C'est une équation différentielle du second ordre à coefficients constants. On résoud l'équation homogène, puis on recherchera une solution particulière.

1. **Solution de l'équation homogène** : On suppose une solution du type $y = e^{rx}$, ce qui conduit à l'équation caractéristique :
$$r^2 - 3r + 2 = 0$$
$$\Delta = 9 - 8 = 1$$
Cette équation admet deux racines réelles : $r_1 = 1$ et $r_2 = 2$. La solution peut s'écrire :
$$y = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x} = Ae^x + Be^{2x}$$
où A et B sont des constantes réelles.
2. **Solution particulière** : Le second membre est une combinaison linéaire de fonctions de la forme e^{mx}, avec $m = 2$ et d'un polynôme de degré 2. m étant une racine de l'équation caractéristique, on recherchera donc une solution particulière du type
$$y_2 = Dxe^{2x} + C_1x^2 + C_2x + C_3$$
, soit :
$$y_2' = (2Dx + D)e^{2x} + 2C_1x + C_2$$
$$y_2'' = (4x + 4)De^{2x} + 2C_1$$
En injectant ces relations dans l'équation (E15), nous obtenons :
$$D\left[(4x+4) - 3(2x+1) + 2x\right]e^{2x} + \left[2C_1 - 3(2C_1x + C_2) + 2(C_1x^2 + C_2x + C_3)\right] = 2x^2 + 3e^{2x}$$
Soit :
$$\begin{cases} D = 3 \\ 2C_1 = 2 \\ -6C_1 + 2C_2 = 0 \\ 2C_1 - 3C_2 + 2C_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D = 3 \\ C_1 = 1 \\ C_2 = 3 \\ C_3 = \dfrac{7}{2} \end{cases}$$
On obtient donc la solution particulière :
$$y_2 = 3xe^{2x} + x^2 + 3x + \frac{7}{2}$$

La solution générale de l'équation (E15) est donc :
$y = Ae^x + (B + 3x)e^{2x} + x^2 + 3x + \frac{7}{2}$ où A et B sont des constantes réelles.

• ***Exercice 3.16***: *Déterminer la forme générale de la solution de l'équation différentielle (E16) :*

$$y'' + y = \sin^2(x) \tag{E16}$$

<u>**Solution :**</u>

$$\sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$$

L'équation (E16) peut s'écrire :

$$y'' + y = \frac{1}{2} - \frac{\cos(2x)}{2}$$

C'est une équation différentielle du second ordre à coefficients constants. On résoud l'équation homogène, puis on recherchera une solution particulière.

1. **Solution de l'équation homogène** : On suppose une solution du type $y = e^{rx}$, ce qui conduit à l'équation caractéristique :
$$r^2 + 1 = 0$$
$$\Delta = -4 = (2j)^2$$
Cette équation admet deux racines complexes conjuguées : $r_1 = j$ et $r_2 = -j$. La solution peut s'écrire :
$$y = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x} = Ae^{jx} + Be^{-jx}$$
ou
$$y = C\cos(x) + D\sin(x)$$
où C et D sont des constantes réelles.

2. **Solution particulière** : Le second membre est une combinaison linéaire de fonctions de la forme $P(x)$ polynôme de degré 0 et d'une fonction trigonométrique. On recherchera donc une solution particulière du type $y_2 = D + C_1\cos(2x) + C_2\sin(2x)$, soit :
$$y_2' = -2C_1\sin(2x) + 2C_2\cos(2x)$$
$$y_2'' = -4C_1\cos(2x) - 4C_2\sin(2x)$$
En injectant ces relations dans l'équation (E16), nous obtenons :
$$-4C_1\cos(2x) - 4C_2\sin(2x) + D + C_1\cos(2x) + C_2\sin(2x) = \frac{1}{2} - \frac{\cos(2x)}{2}$$
Soit :
$$\begin{cases} D = \dfrac{1}{2} \\ -3C_1 = -\dfrac{1}{2} \\ 3C_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D = \dfrac{1}{2} \\ C_1 = \dfrac{1}{6} \\ C_2 = 0 \end{cases}$$
On obtient donc la solution particulière :
$$y_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\cos(2x)$$

La solution générale de l'équation (E16) est donc : $y = C\cos(x) + D\sin(x) + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{6}\cos(2x))$ où C et D sont des constantes réelles.

• ***Exercice 3.17*:** *Déterminer la forme générale de la solution de l'équation différentielle (E17) :*
$$y'' + 4y' + 4y = 3e^{-2x} \tag{E17}$$

Solution : C'est une équation différentielle du second ordre à coefficients constants. On résoud l'équation homogène, puis on recherchera une solution particulière.

1. **Solution de l'équation homogène** : On suppose une solution du type $y = e^{rx}$, ce qui conduit à l'équation caractéristique :
$$r^2 + 4r + 4 = 0$$
$$(r+2)^2 = 0$$
Cette équation admet une racine double : $r = -2$. La solution peut s'écrire :
$$y = (Ax + B)e^{rx} = (Ax + B)e^{-2x}$$
où A et B sont des constantes réelles.

2. **Solution particulière** : Le second membre est une combinaison linéaire de fonctions de la forme Ke^{mx}, avec $m = -2$. m étant une racine double de l'équation caractéristique, on recherchera donc une solution particulière du type $y_2 = (C_1x^2 + C_2x + C_3)e^{-2x}$, soit :

$$y_2' = \left[-2(C_1x^2 + C_2x + C_3) + 2C_1x + C_2\right] e^{-2x}$$

$$y_2'' = \left[4C_1x^2 + x(4C_2 - 8C_1) + 4C_3 - 4C_2 + 2C_1\right] e^{-2x}$$

En injectant ces relations dans l'équation (E17), nous obtenons :

$$2C_1e^{-2x} = 3e^{-2x}$$

Soit :

$$C_1 = \frac{3}{2}$$

On obtient donc la solution particulière :

$$y_2 = (\frac{3}{2}x^2)e^{-2x}$$

La solution générale de l'équation (E17) est donc :
$y = (Ax + B + \frac{3}{2}x^2)e^{-2x}$ où A et B sont des constantes réelles.