Institut National Polytechnique de Toulouse

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DES INGENIEURS EN ARTS CHIMIQUES ET TECHNOLOGIQUES DE TOULOUSE

Rappels de Mathématique
Fonctions – Dérivation - Développements Limités

***Module PAD** (Première Année A Distance) 2007-2008*

Exercices – Série 2

Pascal Floquet
Xuan Meyer

Exercice 1 :
Calculer la dérivée première de la fonction $f(x) = \ln(x^2 - 1)$.

Correction de l'exercice 1 :
Calculer la dérivée première de la fonction $f(x) = \ln(x^2 - 1)$.

Réponse : $f'(x) = \dfrac{df(x)}{dx} = \dfrac{2x}{x^2 - 1}$
Quelques éléments : Appliquer les résultats concernant la dérivée d'une fonction composée.

Exercice 2 :
Calculer les dérivées successives de la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x}, \quad x \in R^*$.

Correction de l'exercice 2 :
Calculer les dérivées successives de la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x}, \quad x \in R^*$.

Réponse : $f^{(n)}(x) = (-1)^n \dfrac{n!}{x^{n+1}}$
Quelques éléments : Prouver la propriété par récurrence après avoir validé les premières dérivées.

Calculons les premières dérivées pour voir apparaître une éventuelle récurrence.
$f'(x) = \dfrac{-1}{x^2}$, $f''(x) = \dfrac{2}{x^3}$, $f'''(x) = -\dfrac{2.3}{x^4} = \dfrac{-6}{x^4}$,..... …
D'après ces résultats , on peut poser comme hypothèse de récurrence :
P_n : $f^{(n)}(x) = (-1)^n \dfrac{n!}{x^{n+1}}$
P_1 est vrai.
Supposons P_k vraie pour $k \leq n$, alors $f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)})'(x)$
$f^{(n+1)}(x) = \left[(-1)^n n!\right]\left[-\dfrac{(n+1)x^n}{(x^{n+1})^2}\right]$ (dérivée de l'inverse d'une fonction $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$)
$f^{(n+1)}(x) = \left[(-1)^n n!\right]\left[-\dfrac{(n+1)x^n}{x^{2n+2}}\right] = (-1)^{n+1} \dfrac{(n+1)!}{x^{n+2}}$ donc P_{n+1} est vraie
Ceci prouve que la propriété est vraie pour tout entier naturel n.

Exercice 3 :
Etudier les variations de la fonction $f(x) = \ln(e^x + 1)$. On vérifiera que lorsque x tend vers $+\infty$, la courbe représentative de f est asymptote à la droite d'équation $y = x$. Montrer que cette fonction admet une fonction réciproque f^{-1} et expliciter cette dernière.

Correction de l'exercice 3 :

Etudier les variations de la fonction $f(x)=\ln(e^x+1)$. On vérifiera que lorsque x tend vers $+\infty$, la courbe représentative de f est asymptote à la droite d'équation y = x. Montrer que cette fonction admet une fonction réciproque f^{-1} et expliciter cette dernière.

Quelques éléments :

$$f'(x)=\frac{e^x}{e^x+1}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=0 \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

Asymptote : Prouver

$\lim_{x\to+\infty}(\frac{f(x)}{x})=1$ et $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x)=0$ (en factorisant e^x dans *f(x)*, par exemple)

La fonction réciproque $f^{-1}\begin{cases}]0,+\infty[\to R \\ x\mapsto \ln(e^x-1)\end{cases}$

La fonction *f* est définie sur R, elle est également continue et dérivable sur R.

$$f'(x)=\frac{e^x}{e^x+1}>0 \quad \forall x\in R$$

f est donc continue, strictement croissante sur l'ensemble des réels.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=0 \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

	-∞	0	+∞
f'(x)	+		+
f(x)	0 ↗		+∞

Asymptote :

$$\lim_{x\to+\infty}(\frac{f(x)}{x})=\lim_{x\to+\infty}(\frac{\ln(1+e^x)}{x})=\lim_{x\to+\infty}(\frac{\ln(e^x(e^{-x}+1))}{x})=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(e^x)+\ln(e^{-x}+1)}{x}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty}(\frac{f(x)}{x})=\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{\ln(e^{-x}+1)}{x})=1$$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to+\infty}(\ln(1+e^x)-x)=\lim_{x\to+\infty}(\ln(e^x(e^{-x}+1))-x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\left[\ln(e^x)+\ln(e^{-x}+1)\right]-x\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to+\infty}(x+\ln(e^{-x}+1)-x)=\lim_{x\to+\infty}(\ln(e^{-x}+1))=0$$

Ce qui prouve que la droite d'équation *y = x* est asymptote à la courbe représentative de *f*.

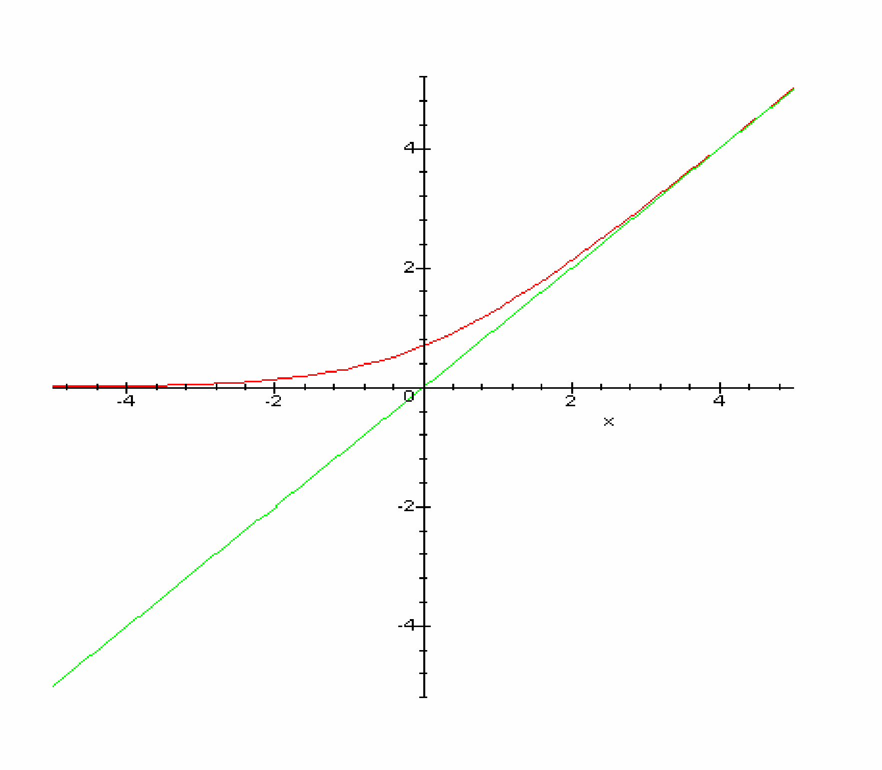
f est une bijection de *R* sur R^{+*}. Déterminons, la bijection réciproque f^{-1}.

Pour tout x réel, $y=\ln(e^x+1)\Leftrightarrow e^y=e^x+1\Leftrightarrow e^x=e^y-1$ $(>0, car \quad y\in\ ]0,\ +\infty[\ )$

soit $\quad x=\ln(e^y-1)$

La fonction réciproque f^{-1} est donc donnée par :

$$f^{-1}\begin{cases}]0,+\infty[\to R \\ x\mapsto \ln(e^x-1)\end{cases}$$



Exercice 4 :

Ecrire le développement limité à l'ordre 4 de la fonction définie sur *R-{1}* par $f(x)=\frac{\sin x}{1-x}$ en *0* .

Correction de l'exercice 4 :

Ecrire le développement limité à l'ordre 4 de la fonction définie sur R-{1} par $f(x)=\frac{\sin x}{1-x}$ *en 0 .*

Réponse : $f(x)=x+x^2+\frac{5}{6}x^3+\frac{5}{6}x^4+x^4\varepsilon(x)$

Quelques éléments : Trouver le $DL_4(0)$ de sin x et effectuer la division…

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+x^4\varepsilon_1(x)$$

$$\begin{array}{rr|l}
x - & x^3/6 & 1 - x \\
x - x^2 & & \\
\cline{1-2}
x^2 & -x^3/6 & x+x^2+5/6x^3+5/6\,x^4 \\
x^2 & -x^3 & \\
\cline{1-2}
 & 5/6\,x^3 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{l} 5/6x^3 - 5/6x^4 \\ \hline \quad 5/6x^4 \end{array}$$

Exercice 5:

Soit $f :]-1,1[\to R$ une fonction 4 fois continûment différentiable telle que $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{\sin x - x} = 1$. Trouver son développement limité à l'ordre 3 autour de *0* .

Correction de l'exercice 5 :

Soit $f :]-1,1[\to R$ *une fonction 4 fois continûment différentiable telle que* $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{\sin x - x} = 1$. *Trouver son développement limité à l'ordre 3 autour de 0.*

Réponse : $f(x) = -\frac{1}{6}x^3 + x^3\varepsilon(x)$

Quelques éléments : Ecrire de manière générale le $DL_3(0)$ de *f(x)*

En désignant par $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + x^3\varepsilon(x)$ le $DL_3(0)$ de *f(x),* on a : $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{\sin x - x} = \lim_{x \to 0} \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + x^3\varepsilon(x)}{-\frac{1}{6}x^3 + x^3\varepsilon'(x)}$, ce qui nous permet de conclure que

$a_0 = a_1 = a_2 = 0 \quad a_3 = -1/6$

Exercice 6:

Calculer $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$

Correction de l'exercice 6 :

Calculer $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$.

Réponse : $-\frac{1}{12}$

Quelques éléments : Utiliser les $DL_2(0)$ des fonctions

Puisque $\cos x - 1 = x^2/2 + x^2\varepsilon_1(x)$ *avec* $\lim_{x \to 0} \varepsilon_1(x) = 0$

On peut écrire pour tout *x* de]–Π/2, Π/2[

$\sqrt{\cos x} = \sqrt{1 + (\cos x - 1)} = 1 - x^2/4 + x^2\varepsilon_2(x)$ *avec* $\lim_{x \to 0} \varepsilon_2(x) = 0$

et

$$\sqrt[3]{\cos x} = \sqrt[3]{1+(\cos x-1)} = 1-x^2/6+x^2\varepsilon_3(x) \qquad \textit{avec} \qquad \lim_{x\to 0}\varepsilon_3(x)=0$$

Donc $\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x} = -x^2/12+x^2\varepsilon(x) \qquad \textit{avec} \qquad \lim_{x\to 0}\varepsilon(x)=0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x} = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^2}{12}+x^2\varepsilon(x)}{\sin^2 x} = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{12}+x^2\varepsilon(x)}{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2} = -\frac{1}{12}$$

Exercice 7:

Etudier la fonction $f:[-1,1]\to R$ définie par *f(x)=Arccos(4x^3 - 3x)*.

Correction de l'exercice 7 :

Etudier la fonction $f:[-1,1]\to R$ définie par f(x)=Arccos(4x^3 - 3x).

Quelques éléments : *f* est bien définie sur [-1, 1]

$$f'(x)\begin{cases}\dfrac{3}{\sqrt{1-x^2}} & si\ \ x\in\,]-1/2,1/2[\\[2mm] \dfrac{-3}{\sqrt{1-x^2}} & si\ \ x\in\,]-1,-1/2[\,\cup\,]1/2,1[\end{cases}$$

Point d'inflexion en $x = 0$

Vérifions que *f* est bien définie sur [-1, 1]. Considérons pour cela la fonction *g(x)=(4x^3 - 3x)*. On a *g'(x)=3(4x^2 - 1)* et le tableau de variation suivant :

	-1	-1/2	1/2	1
g'(x)	+	-	-	+
g(x)	-1 ↗	1 ↘	-1 ↗	1

Dérivées : $f'(x) = \dfrac{-g'(x)}{\sqrt{1-g(x)^2}} = \dfrac{-3(4x^2-1)}{\sqrt{(1-x^2)(4x^2-1)^2}} = \begin{cases}\dfrac{3}{\sqrt{1-x^2}} & si\ \ x\in\,]-1/2,1/2[\\[2mm] \dfrac{-3}{\sqrt{1-x^2}} & si\ \ x\in\,]-1,-1/2[\,\cup\,]1/2,1[\end{cases}$

$$\lim_{x\to -1^+} f'(x) = \lim_{x\to +1^-} f'(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to 1/2^+} f'(x) = \lim_{x\to -1/2^-} f'(x) = -2\sqrt{3}$$

$$\lim_{x \to 1/2^-} f'(x) = \lim_{x \to -1/2^+} f'(x) = 2\sqrt{3}$$

$$f''(x) = \begin{cases} \dfrac{3x}{\sqrt{(1-x^2)^3}} & si \ \ x \in \left]-1/2, 1/2\right[\\ \dfrac{-3x}{\sqrt{(1-x^2)^3}} & si \ \ x \in \left]-1, -1/2\right[\cup \left]1/2, 1\right[\end{cases}$$

Le graphique de *f* admet donc un point d'inflexion en *x=0* (dérivée seconde s'annule en changeant de signe en 0).

Tableau de variation de *f*

	-1	-1/2	1/2	1
f'(x)	-	+	-	
f(x)	π ↘	0 ↗	π ↘	0

Graphique :