INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE TOULOUSE

MATHS Rappels
Intégration

Pascal Floquet
Xuân Meyer
Jean-Claude Satge

Première Année à Distance

Septembre 2006

Table des matières

Chapitre 2

INTEGRATION

2.1 Intégrale définie

a et b désignent deux réels tels que $a < b$, on s'intéresse dans cette partie aux fonctions réelles de la variable réelle, définies sur l'intervalle fermé $I = [a; b]$ et bornées.

2.1.1 Intégrale d'une fonction en escalier sur un segment

Définition 2.1.1 (subdivision d'un intervalle) *On appelle subdivision d'un intervalle $[a; b]$ toute famille finie $s = (a_i)_{0 \leq i \leq n}$ telle que :*

$$a = a_0 \leq a_1 \ldots \leq a_{n-1} \leq a_n = b \ \text{ avec } \ n \in \mathbb{N}, n \geq 1$$

Définition 2.1.2 (Fonction en escalier) *Soit f une fonction réelle de l'intervalle $I = [a; b]$ dans $\mathbb{R}$. f est une fonction en escalier si et seulement si il existe une subdivision $s = (a_i)_{0 \leq i \leq n}$ de $[a; b]$, dite* ***subdivision adaptée à*** *f, telle que f soit constante sur chacun des intervalles $]a_k; a_{k+1}[$ (pour tout x de $]a_k; a_{k+1}[$, on a ; $f(x) = y_k$, où y_k est une constante réelle)*

<u>*Remarque*</u> : les valeurs de f aux points $a_0, \ldots, a_i, \ldots, a_n$ sont quelconques.

<u>*Note*</u> : on note $\mathcal{E}(a; b)$ l'ensemble des fonctions en escalier sur $[a; b]$

Définition 2.1.3 (Intégrale d'une fonction en escalier) *Soit f une fonction en escalier sur $I = [a; b]$, on appelle intégale de f sur $[a; b]$ le réel :*

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k)y_k$$

où $s = (a_i)_{0 \leq i \leq n}$ est une subdivision adaptée à f

Remarque 2.1.1

- *Le réel $\sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k)y_k$ ne dépend pas de la subdivision adaptée à f*
- *L'intégrale de f sur $[a; b]$ est l'aire algébrique des rectangles hachurés de la figure (Fig. 2.1) : on affecte l'aire des rectangles situés au dessus de l'axe (Ox) d'un signe positif et l'aire de ceux situés en dessous de l'axe d'un signe négatif*

2.1.2 Intégrale d'une fonction bornée

Soit f une fonction réelle de la variable réelle bornée sur $[a; b]$. Il existe des fonctions en escalier majorant f sur $[a; b]$, par exemple $e : x \mapsto M$, M désignant un majorant de f. De même, il existe des fonctions en escalier minorant f sur $[a; b]$

Définition 2.1.4 (Fonction bornée intégrable) *Soit f fonction bornée sur $[a; b]$, on dit que f est* ***intégrable au sens de Riemann*** *si et seulement si il existe deux fonctions en escalier u et v telles que*

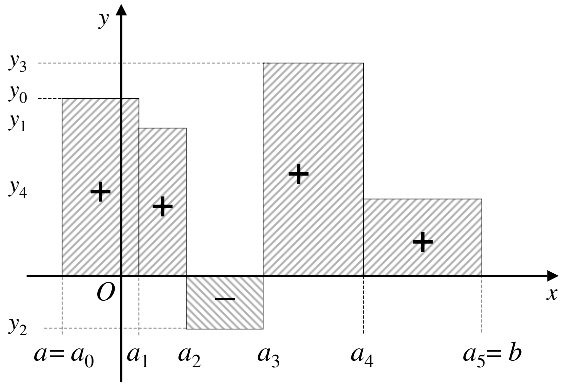

Fig. 2.1 –

pour tout $x \in [a; b]$ on ait $u(x) \leq f(x) \leq v(x)$ et dont les intégrales sont arbitrairement voisines. Autrement dit :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \ \exists u \in \mathcal{E}(a; b),\ \ \exists v \in \mathcal{E}(a; b)\ /\ u \leq f \leq v\ \ et\ \ \int_a^b v(x)dx - \int_a^b u(x)dx < \varepsilon$$

Interprétation graphique : l'aire comprise entre les représentations de u et v est aussi proche de 0 qu'on le veut (Fig. 2.2)

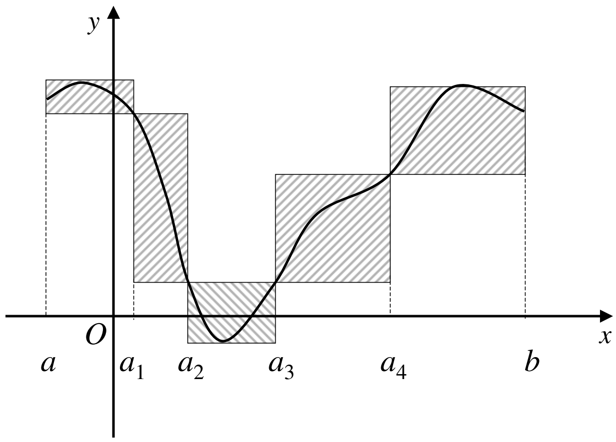

Fig. 2.2 –

L'ensemble des réels de la forme $\int_a^b u(x)dx$ où $u \in \mathcal{E}(a; b)$ et $u \leq f$ sur $[a; b]$ admet une borne supérieure. De même l'ensemble des réels de la forme $\int_a^b v(x)dx$ où $v \in \mathcal{E}(a; b)$ et $v \geq f$ sur $[a; b]$ admet une borne inférieure.
Si f est intégrable au sens de Riemann, ces deux bornes sont égales à un réel qui s'appelle **intégrale de**

f **sur** $[a;b]$ que l'on note : $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$

<u>*Note*</u> : si f est une fonction en escalier on retrouve, bien sûr, la définition 2.1.2

Théorème 2.1.5 *Toute fonction f continue sur $[a;b]$ est intégrable au sens de Riemann sur $[a;b]$*

2.1.3 Propriétés de l'intégrale

f et g sont deux fonctions intégrables sur $[a;b]$, on a :

(a)

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$
$$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx \quad (k \in \mathbb{R})$$

(b) Si f est positive sur $[a\,;b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$

(c) Si $f \leq g$ sur $[a\,;b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$

(d) Relation de Chasles

Si $c \in]a\,;b[$ alors f est intégrable sur $[a\,;c]$ et $[c\,;b]$ et :

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

Par convention, on pose :

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0 \quad \text{et} \int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

La relation de Chasles est alors valable pour $c \in [a\,;b]$

De plus, on démontre que, a, b, c étant trois réels tels que $a < b < c$, si f est une fonction intégrable au sens de Riemann sur $[a\,;c]$ et sur $[c\,;b]$ alors f est intégrable sur $[a\,;b]$ et la relation de Chasles est vérifiée. On tire de cette propriété le théorème suivant qui complète le Th. 2.1.5. Il est très important car il ouvre un champs considérable de fonctions intégrables.

Théorème 2.1.6 *Toute fonction f continue* ***par morceaux*** *sur $[a;b]$ est intégrable sur $[a;b]$*

Remarque 2.1.2 (Interprétation géométrique de l'intégrale)
Il vient immédiatement de la définition que l'intégrale d'une fonction continue par morceaux sur l'intervalle $[a;b]$ est représentée par l'aire algébrique délimitée par la courbe et l'axe des abscisses. (Fig. 2.3)

Théorème 2.1.7 *Si une fonction f est intégrable sur $[a;b]$ alors $|f|$ est intégrable sur $[a;b]$ et :*

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

ATTENTION : Ce théorème doit être utilisé dans le bon sens : prenons, par exemple, la fonction g définie par :

$$\begin{array}{rcl} g : [0;1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 1 \quad si \quad x \in \mathbb{Q} \\ x & \longmapsto & -1 \quad si \quad x \notin \mathbb{Q} \end{array}$$

$|g|$ est intégrable sur $[0;1]$ mais g **ne l'est pas**

Théorème 2.1.8 (Inégalité de Schwarz) *Soient f et g deux fonctions intégrables sur $[a;b]$ alors fg est intégrable sur $[a;b]$ et :*

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)]\,dx\right| \leq \sqrt{\int_a^b (f(x))^2\,dx}\sqrt{\int_a^b (g(x))^2\,dx}$$

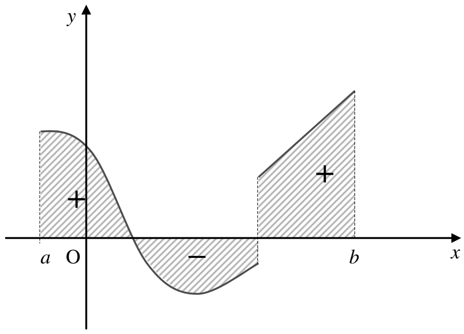

FIG. 2.3 –

Démonstration : Nous admettons que fg est intégrable. Soit $k \in \mathbb{R}$ on a :

$$((f+kg)(x))^2 = f^2(x) + 2kf(x)g(x) + k^2g^2(x)$$

Donc :

$$\int_a^b ((f+kg)(x))^2 \, dx = \int_a^b (f(x))^2 \, dx + 2k \int_a^b f(x)g(x) \, dx + k^2 \int_a^b (g(x))^2 \, dx$$

Or $\forall k \in \mathbb{R}$, $\int_a^b ((f+kg)(x))^2 \, dx \geq 0$, donc le trinôme en k qui constitue le deuxième membre de l'égalité précédente doit être positif quelque soit k, son discriminant doit donc être négatif ou nul, ce qui équivaut à :

$$\left(\int_a^b f(x)g(x) \, dx\right)^2 - \int_a^b (f(x))^2 \, dx \int_a^b (g(x))^2 \, dx \leq 0$$

D'où le résultat.

2.1.4 Théorème de la moyenne, valeur moyenne d'une fonction sur un segment

Théorème 2.1.9 (Théorème de la moyenne) *Soient f une fonction continue sur un intervalle $[a\,;b]$ (avec $a \neq b$), m et M les bornes inférieures et supérieures de f sur $[a\,;b]$. Alors il existe μ compris entre m et M, tel que $\int_a^b f(x) \, dx = \mu(b-a)$*

Démonstration : on a $m \leq f(x) \leq M$, on en déduit :

$$\int_a^b m \, dx \leq \int_a^b f(x) \, dx \leq \int_a^b M \, dx$$

Et donc :

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) \, dx \leq M(b-a)$$

Enfin

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, dx \;\; (= \mu) \leq M$$

Définition 2.1.10 *$f$est une fonction intégrable sur un intervalle $[a\,;b]$, avec $a \neq b$. La valeur moyenne de f sur $[a\,;b]$ est le réel*

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, dx$$

Si, de plus f est continue sur $[a;b]$, il existe une valeur c de x comprise entre a et b et telle que $\mu = f(c)$

Interprétation géométrique
Pour une fonction f positive sur $[a\,;b]$
On suppose que $m \leq f(x) \leq M$. L'aire du domaine associé à f sur $[a\,;b]$ est comprise entre aires des deux rectangles $ABCD$ et $ABEF$.(($m(b-a)$ est l'aire du rectangle $ABCD$ et $M(b-a)$ celle du rectangle $ABEF$)
Cette aire est égale à l'aire du rectangle d'aire $\mu(b-a)$, μ étant la valeur moyenne de f sur $[a\,;b]$.(Fig 2.4)

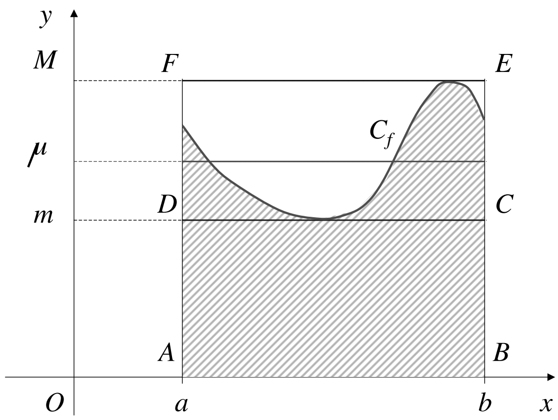

Fig. 2.4 –

2.2 Primitives. Calcul des intégrales définies

2.2.1 Primitives

Définition 2.2.1 (Primitive) *f est une fonction continue sur un intervalle $[a\,;b]$. On appelle fonction primitive de f sur $[a\,;b]$ toute fonction F, dérivable sur $[a\,;b]$, telle que $F'(x) = f(x)$, pour tout x de $[a\,;b]$.*

Théorème 2.2.2 *f est une fonction continue sur un intervalle $[a\,;b]$. Pour tout x de $[a\,;b]$, la fonction $F : x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ est dérivable et sa dérivée est f*

Soit f continue sur $[a\,;b]$, $x \in [a\,;b]$, la fonction $F : x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ est la primitive de f qui s'annule au point $x = a$

2.2.2 Famille de primitives

Soit F et G deux fonctions définies pour tout x réel par : $F(x) = x^2 + 4$ et $G(x) = x^2 - 1$
Pour tout x réel, on a : $F'(x) = f(x)$ et $G'(x) = f(x)$
F et G sont deux primitives de f , elles diffèrent d'une constante.

Théorème 2.2.3 *Si F est une fonction primitive de f sur un intervalle I alors toute fonction définie sur I par : $x \mapsto F(x) + k$ (où k est une constante réelle) est une primitive de f sur I.*

Ainsi, si l'on appelle f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto x$, les primitives des f sur $\mathbb{R}$ sont définies par : $x \mapsto F(x) = \frac{1}{2}x^2 + k$

2.2.3 Tableaux des primitives usuelles

Par lecture inverse des tableaux des fonctions dérivées usuelles, on obtient :

$f(x)$	$F(x)$	Domaine de validité
a (a constante réelle)	ax	$\mathbb{R}$
x^α, α réel et $\alpha \neq -1$	$\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$	$\mathbb{R}$ si α entier naturel $\mathbb{R}^*$ si α entier négatif, $\alpha \neq -1$ $]0;+\infty[$dans les autres cas
$\frac{1}{x}$	$\ln x$	$]0;+\infty[$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$	$x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$
$\mathrm{Sh}x$	$\mathrm{Ch}x$	$\mathbb{R}$
$\mathrm{Ch}x$	$\mathrm{Sh}x$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{\mathrm{Ch}^2 x}$	$\mathrm{Th}x$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\ln\left\|x+\sqrt{x^2-1}\right\|$	$]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$
$\dfrac{1}{1-x^2}$	$\dfrac{1}{2}\ln\left\|\dfrac{1+x}{1-x}\right\|$	$\mathbb{R}-\{-1;1\}$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$	$]-1;1[$

2.2.4 Primitives et calcul intégral

Proposition 2.2.1 *Toute primitive d'une fonction continue sur $[a;b]$ s'écrit sous la forme*

$$F : x \mapsto \int_a^x f(t)\, dt + k$$

où k est une constante réelle.

Si F est une primitive de f alors

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$$

Note : le résultat ne dépend pas de la primitive choisie.
En effet, si G est une autre primitive de f, on a : $G(x) = F(x) + k$.
Et donc : $G(b) - G(a) = F(b) + k - (F(a) + k) = F(b) - F(a)$

Remarque 2.2.1 *Dans les calculs il est commode d'utiliser l'écriture :*

$$\int_a^b f(x)\, dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Note : le choix de la variable d'intégration ne modifie pas le résultat : $\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b f(t)\, dt$. On dit que la variable d'intégration est muette, on peut remplacer x par n'importe quelle autre lettre (sauf les bornes a ou b).

- ***Exemple 2.1:*** Calculer : $I = \int_0^1 (2t-1)^2\, dt$

On a : $I = \displaystyle\int_0^1 (2t-1)^2\, dt = \int_0^1 (4t^2 - 4t + 1)\, dt$

donc $I = 4\displaystyle\int_0^1 t^2\, dt - 4\int_0^1 t dt + \int_0^1 dt$

et donc $I = \left[\dfrac{4}{3}t^3 - 2t^2 + t\right]_0^1 = \dfrac{4}{3} - 2 + 1 - 0 = \dfrac{1}{3}$

• ***Exemple 2.2*:** Calculer : $J = \displaystyle\int_1^2 \frac{x-1}{x^2}\,dx$

On a : $J = \displaystyle\int_1^2 \frac{x-1}{x^2}\,dx = \int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right) dx$

donc $J = \left[\ln x + \dfrac{1}{x}\right]_1^2 = \ln 2 + \dfrac{1}{2} - 1 = \ln 2 - \dfrac{1}{2}$

Définition 2.2.4 (Intégrale indéfinie) *On désigne l'ensemble des primitives de f par le symbole*

$$\int f(x)dx$$

qui se lit "somme de $f(x)dx$" et qui est appelé intégrale indéfinie.

Les propriétés de la dérivation de la composée de deux fonctions dérivables nous permettent de donner les propriétés suivantes :

(a) $\int u'(x)\cos(u(x))dx = \sin(u(x)) + k$

(b) $\int u'(x)\sin(u(x))dx = -\cos(u(x)) + k$

(c) $\int u'(x)\mathrm{e}^{u(x)}dx = \mathrm{e}^{u(x)} + k$

(d) Si u ne s'annule pas, $\displaystyle\int \frac{u'(x)}{u(x)}dx = \ln|u(x)| + k$

(e) Si u ne s'annule pas lorsque $\alpha \in \mathbb{Z}_-$ et si u est strictement positif lorsque α n'est pas entier

$$\int u'(x)\,[u(x)]^\alpha\,dx = \frac{1}{\alpha+1}\,[u(x)]^{\alpha+1} + k$$

• ***Exemple 2.3*:** Déterminer $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$

On a : $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{1}{2}2x\left(x^2+1\right)^{-\frac{1}{2}}$

donc $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \left[\sqrt{x^2+1}\right]_0^1 = \sqrt{2} - 1$

• ***Exemple 2.4*:** Déterminer $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{t}{t^2+1}\,dt$

$J = \displaystyle\int_0^1 \frac{t}{t^2+1}\,dt = \int_0^1 \frac{1}{2} \times \frac{2t}{t^2+1}\,dt = \left[\frac{1}{2}\ln(t^2+1)\right]_0^1 = \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\ln 1 = \ln\sqrt{2}$

• ***Exemple 2.5*:** Déterminer $K(x) = \int x\sin(x^2+1)\,dx$

$K(x) = \displaystyle\int x\sin(x^2+1)\,dx = \frac{1}{2}\int 2x\sin(x^2+1)\,dx = -\frac{1}{2}\cos(x^2+1) + k$

2.3 Intégration par parties

Théorème 2.3.1 *u et v sont deux fonctions dérivables un intervalle I et telles que u' et v' soient continues sur I. Pour tous réels a et b de I, on a :*

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx$$

Démonstration : u et v étant dérivables sur I, la fonction uv est dérivable sur I et $(uv)' = u'v + uv'$

u' et v' étant continues sur I, les fonctions $u'v$ et uv' et par suite la fonction $(uv)'$ sont continues sur I, on peut donc intégrer chaque membre de cette égalité entre a et b.

On écrit $uv' = (uv)' - u'v$

Donc $\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = \int_a^b (uv)'(x)\,dx - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx$
et donc

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx$$

car uv est une primitive de $(uv)'$

- ***Exemple 2.6*:** Calculer $I_1 = \int_0^1 xe^x\,dx$;

On pose $u(x) = x$ et $v'(x) = \mathrm{e}^x$,
on obtient $u'(x) = 1$ et $v(x) = \mathrm{e}^x$
donc $I_1 = \int_0^1 x\mathrm{e}^x\,dx = [x\mathrm{e}^x]_0^1 - \int_0^1 \mathrm{e}^x\,dx$
donc $I_1 = \mathrm{e} - [\mathrm{e}^x]_0^1$
Enfin $I_1 = \mathrm{e} - (\mathrm{e} - 1) = 1$

- ***Exemple 2.7*:** Calculer $I_2 = \int_1^x \ln t\,dt$ (avec $x > 0$)

Calcul de I_2 : pour tout $t > 0$, on pose $u(t) = \ln t$ et $v'(t) = 1$,
on obtient $u'(t) = \dfrac{1}{t}$ et $v(t) = t$
donc $I_2 = \int_1^x \ln t\,dt = [t\ln t]_1^x - \int_1^x dt$
donc $I_2 = x\ln x - [t]_1^x$
Enfin $I_2 = x\ln x - x + 1$

2.4 Intégration par changement de variable

2.4.1 Changement de variable du type $t \mapsto at + b$ $(a \neq 0)$

- ***Exemple 2.8*:** On se propose de calculer d'une nouvelle façon l'intégrale $I = \int_0^1 (2t-1)^2\,dt$

Si l'on pose $x = 2t - 1$
On obtient : $\dfrac{dx}{dt} = 2$, et donc : $dt = \dfrac{1}{2}dx$
Pour $t = 0$, on a : $x = -1$, et pour $t = 1$, on a : $x = 1$.
La fonction $\varphi : t \mapsto 2t - 1$ continue et strictement croissante sur l'intervalle $[0\,;1]$, réalise une bijection de $[0\,;1]$ sur $[-1\,;1]$
I devient :

$$I = \int_0^1 (2t-1)^2\,dt = \int_{-1}^1 x^2 \times \frac{1}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 x^2\,dx$$

Enfin, on obtient :

$$I = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^1 = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

On admet le résultat :

Théorème 2.4.1 *Soit $x = \varphi(t) = at + b$, avec $a \neq 0$. Si f est une fonction de continue sur $\varphi([t_1\,;t_2])$. On a :*

$$\int_{t_1}^{t_2} f(at+b)\,dt = \frac{1}{a}\int_{at_1+b}^{at_2+b} f(x)\,dx$$

2.4.2 Changement de variable du type $t \mapsto \varphi(t)$

- ***Exemple 2.9:*** on veut calculer $J = \displaystyle\int_1^4 \frac{1}{1+\sqrt{t}}\, dt$.

On pose $x = \varphi(t) = \sqrt{t}$
On obtient : $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1}{2\sqrt{t}}$
Ce qui peut s'écrire $dt = 2\sqrt{t}dx$, ou encore $dt = 2xdx$, car $x = \sqrt{t}$
Pour $t = 1$, on a : $x = 1$, et pour $t = 4$, on a : $x = 2$, la fonction $t \mapsto \sqrt{t}$ étant continue et strictement croissante sur l'intervalle $[1\,;4]$, φ réalise une bijection de $[1\,;4]$ sur $[1\,;2]$
J devient :

$$J = \int_1^4 \frac{1}{1+\sqrt{t}}\, dt = \int_1^2 \frac{1}{1+x} \times 2xdx = \int_1^2 \frac{2x}{1+x}\, dx$$

En remarquant que $\dfrac{2x}{1+x} = 2 - \dfrac{2}{1+x}$, on obtient :

$$J = \int_1^2 \left(2 - \frac{2}{1+x}\right) dx = [2x - 2\ln(1+x)]_1^2 = 4 - 2\ln 3 - (2 - 2\ln 2) = 2(1 - \ln 3 + \ln 2)$$

On admet le résultat :

Théorème 2.4.2 *On note : $x = \varphi(t)$, on suppose que φ est continue et strictement monotone sur $[t_1\,;t_2]$. Si f est une fonction de continue sur $\varphi([t_1\,;t_2])$. On a :*

$$\int_{t_1}^{t_2} f\,[\varphi(t)]\varphi'(t)\, dt = \int_{\varphi(t_1)}^{\varphi(t_2)} f(x)\, dx$$

2.4.2.1 Intégration de fractions rationnelles en sin et cos

On s'intéresse ici au calcul des intégrales du type :

$$\int_a^b \frac{f\,(\sin(x), \cos(x))}{g\,(\sin(x), \cos(x))} dx = \int_a^b H(x)dx$$

où f et g sont deux polynômes.
Pour calculer ce type d'intégrales, un changement de variables possible est :

$$t = \tan\frac{x}{2}$$

On a alors : $dt = \dfrac{1}{2}\left[1 + \tan^2\left(\dfrac{x}{2}\right)\right] dx$
Soit : $dx = \dfrac{2}{1+t^2}dt$.
On utilise les formules de trigonométries :

$$\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

pour réécrie l'intégrale en t.
Ce changement de variable marche toujours mais peut parfois conduire à des calculs longs et fastidieux.
Dans certains cas, d'autres changements de variables permettent de simplifier les calculs :

- si $H(x)dx$ reste invariant quand on change x en $(-x)$, on pose : $t = \cos(x)$
- si $H(x)dx$ reste invariant quand on change x en $(\pi - x)$, on pose : $t = \sin(x)$
- si $H(x)dx$ reste invariant quand on change x en $(\pi + x)$, on pose : $t = \tan(x)$

Dans tous les cas, il est très souvent utile d'exploiter la relation $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ pour exprimer $\sin(x)$ en fonction de $\cos(x)$ et inversement.

- ***Exemple 2.10*:** Calculer $I = \int \frac{dx}{\sin^2(x)\cos(x)}$

Soit : $H(x) = \frac{1}{\sin^2(x)\cos(x)}$.
$H(\pi - x) = \frac{1}{\sin^2(\pi - x)\cos(\pi - x)} = -\frac{1}{\sin^2(x)\cos(x)}$
$d(\pi - x) = -dx$
Donc : $H(x)dx$ reste invariant quand on change x en $(\pi - x)$, on pose donc $t = \sin(x)$
$dt = \cos(x)dx = \sqrt{1 - \sin^2(x)}dx$, d'où : $dx = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$
D'où : $I = \int \frac{dx}{\sin^2(x)\cos(x)} = \int \frac{dt}{t^2(1-t^2)}$ I s'intègre en décomposant la fraction rationelle en t en éléments simples (voir paragraphe suivant) : $\frac{1}{t^2(1-t^2)} = \frac{1}{t^2} + \frac{1}{2}\frac{1}{1-t} + \frac{1}{2}\frac{1}{1+t}$
D'où :

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \frac{1}{t^2} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1-t} + \int \frac{1}{2}\frac{1}{1+t} \\ &= -\frac{1}{t} - \frac{1}{2}ln\,|1-t| + \frac{1}{2}ln\,|1+t| + C \\ &= -\frac{1}{t} + \frac{1}{2}ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + C \end{aligned}$$

d'où : $I = -\frac{1}{\sin(x)} + \frac{1}{2}ln\left|\frac{1+\sin(x)}{1-\sin(x)}\right| + C$ où C est une constante réelle.

2.4.2.2 Intégration de fonctions comprenant des radicaux

On s'intéresse ici au calcul des intégrales du type :

$$\int_a^b R(x,y)dx$$

où $R(x)$ représente une fonction faisant intervenir x et un radical $y(x)$.
Suivant $y(x)$ différents changements de variable sont possibles :

- si $y(x) = \sqrt{a_1x + a_0}$, on pose $t^2 = a_1x + a_0$ On a alors : $2tdt = a_1dx$, soit $dx = \frac{2dt}{a_1}$
  Résoudre I, revient à calculer :

$$I = \int_a^b R\left(\frac{t^2 - a_0}{a_1}, t\right)\frac{2t}{a_1}dt$$

- si $y(x) = \sqrt{a_2x^2 + a_1x + a_0} = \sqrt{a_2\left[\left(x + \frac{a_1}{2a_2}\right)^2 + \frac{4a_2a_0 - a_1^2}{4a_2^2}\right]}$

  Suivant les valeurs de a_0, a_1 et a_2 ,on peut avoir différents changements de variable :
  $\diamond$ si $a_2x^2 + a_1x + a_0 = k^2\left[(x-\alpha)^2 + \beta^2\right]$ on posera : $\tan(t) = \frac{x-\alpha}{\beta}$ ou $sh(t) = \frac{x-\alpha}{\beta}$
  $\diamond$ si $a_2x^2 + a_1x + a_0 = k^2\left[(x-\alpha)^2 - \beta^2\right]$ on posera : $ch(t) = \frac{x-\alpha}{\beta}$
  $\diamond$ si $a_2x^2 + a_1x + a_0 = k^2\left[-(x-\alpha)^2 + \beta^2\right]$ on posera : $\sin(t) = \frac{x-\alpha}{\beta}$

- ***Exemple 2.11*:** Calculer $I = \int \frac{dx}{x\sqrt{1-x}}$

Posons : $t^2 = 1 - x$, soit $2tdt = -dx$ et $dx = -2tdt$, d'où :
$I = \int \frac{dx}{x\sqrt{1-x}} = -\int \frac{2tdt}{(1-t^2)t} = -2\int \frac{dt}{(1-t^2)}$
Or $\frac{1}{(1-t^2)} = \frac{1}{2(1-t)} + \frac{1}{2(1+t)}$, d'où
$I = -\int \frac{dt}{(1-t)} - \int \frac{dt}{(1+t)} = \ln|1-t| - \ln|1+t| + C$ d'où :

$I = \ln\left|\dfrac{1-\sqrt{1-x}}{1+\sqrt{1-x}}\right| + C$ où C est une constante réelle.

- ***Exemple 2.12*:** Calculer $J = \displaystyle\int \sqrt{4+x^2}dx$

$4+x^2$ est du type $k^2\left[(x-\alpha)^2+\beta^2\right]$ avec $\alpha=0$, $\beta=2$ et $k=1$.

- Posons : $sh(t) = \dfrac{x}{2}$, soit $ch(t)dt = \dfrac{dx}{2}$ et $dx = 2ch(t)dt$, d'où :

$$\begin{aligned}
J &= \int \sqrt{4+x^2}dx \\
&= \int \sqrt{4(1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}dx \\
&= 2\int \sqrt{(1+sh^2(t)}2ch(t)dt \\
&= 4\int ch^2(t)dt \\
&= 4\int \frac{1+ch(2t)}{2}dt \\
&= 2\int (1+ch(2t))dt \\
&= 2\int dt + 2\int ch(2t)dt \\
&= 2t + sh(2t) + C \\
&= 2t + 2sh(t)ch(t) + C \\
&= 2t + 2sh(t)\sqrt{1+sh^2(t)} + C
\end{aligned}$$

d'où : $J = 2Argsh\left(\dfrac{x}{2}\right) + \dfrac{x}{2}\sqrt{4+x^2} + C$ où C est une constante réelle.

- On peut également poser : $\tan(t) = \dfrac{x}{2}$, soit $(1+\tan^2(t))dt = \dfrac{dx}{2}$ et $dx = 2(1+\tan^2(t))dt$ mais comme nous allons le voir les calculs sont plus fastidieux. On a :

$$\begin{aligned}
J &= \int \sqrt{4+x^2}dx \\
&= \int \sqrt{4(1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}dx \\
&= 4\int \sqrt{(1+\tan^2(t)}(1+\tan^2(t)dt \\
&= 4\int (1+tan^2(t))^{\frac{3}{3}}dt \\
&= 4\int \frac{dt}{\cos^3(t)}
\end{aligned}$$

Posons : $z = \sin(t)$, d'où $dz = \cos(t)dt$, et $\cos^2(t) = 1-\sin^2(t)$, d'où :

$$\begin{aligned}
J &= 4\int \frac{dt}{\cos^3(t)} \\
&= 4\int \frac{1}{(1-z^2)^2}dz \\
&= 4\int \frac{1}{\left[(1-z)(1+z)\right]^2}dz
\end{aligned}$$

En faisant une décomposition en éléments simples du membre de droite, on obtient :
$\dfrac{1}{\left[(1-z)(1+z)\right]^2} = \frac{1}{4}\left[\dfrac{1}{(1-z)} + \dfrac{1}{(1+z)} + \dfrac{1}{(1+z)^2} + \dfrac{1}{(1-z)^2}\right]$

d'où :

$$\begin{aligned} J &= \int \left[\frac{1}{(1-z)} + \frac{1}{(1+z)} + \frac{1}{(1+z)^2} + \frac{1}{(1-z)^2}\right] \\ &= \ln\left|\frac{1+z}{(1-z)}\right| - \frac{1}{(1+z)} + \frac{1}{(1-z)} + C \end{aligned}$$

Soit en revenant à la variable t :

$$\begin{aligned} J &= \ln\left|\frac{1+\sin(t)}{(1-\sin(t))}\right| - \frac{1}{(1+\sin(t))} + \frac{1}{(1-\sin(t))} + C \\ &= \ln\left|\frac{(1+\sin(t))^2}{(1-\sin^2(t))}\right| - \frac{2\sin(t)}{(1-\sin^2(t))} + C \\ &= \ln\left|\frac{(1+\sin(t))^2}{(cos^2(t))}\right| + \frac{2\sin(t)}{(\cos^2(t))} + C \\ &= \ln\left|\left(\frac{1+\sin(t)}{\cos(t)}\right)^2\right| + 2\tan(t)\frac{1}{\cos(t)} + C \\ &= \ln\left|\left(\frac{1}{\cos(t)} + \tan(t)\right)^2\right| + 2\tan(t)\sqrt{1+tan^2(t)} + C \end{aligned}$$

Or $\frac{1}{\cos(t)} = \sqrt{1+\tan^2(t)}$, d'où :

$$\begin{aligned} J &= 2\ln\left|\sqrt{1+\tan^2(t)} + \tan(t)\right| + 2\tan(t)\sqrt{1+tan^2(t)} + C \\ &= 2\ln\left|\sqrt{1+\frac{x^2}{4}} + \frac{x}{2})\right| + 2\frac{x}{2}\sqrt{1+\frac{x^2}{4}} + C \\ &= 2\ln\left|\frac{1}{2}(\sqrt{4+x^2} + x)\right| + \frac{1}{2}x\sqrt{4+x^2} + C \end{aligned}$$

$J = 2\ln(\sqrt{4+x^2} + x) + \frac{1}{2}x\sqrt{4+x^2} + D$

où D est une constante réelle.

2.5 Intégration de fractions rationnelles

2.5.1 Décomposition d'une fraction rationnelle en éléments simples

éléments irréductibles : les éléments irréductibles non constants dans $\mathbb{R}[X]$ sont les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 à discriminant strictement négatif.

éléments simples : on appelle élément simple toute fraction rationnelle de la forme $\frac{S}{B^n}$ avec degré(S) <degré(B), où S et B sont des polynômes, n un entier naturel et B un élément irréductible.

Toute fraction rationnelle s'écrit de façon unique comme somme d'un polynôme et d'éléments simples :

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = E(x) + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{\lambda_i} \frac{C_{i,j}}{(x-a_i)^{\lambda_i - j}} + \sum_{m}^{i=1} \frac{M_i x + N_i}{[(x-\alpha_i)^2 + \beta_i^2]^{k_i}}$$

où les a_i sont les m racines réelles d'ordre λ_i du polynôme $Q(x)$.

Décomposer une fraction rationnelle en éléments simples consiste à déterminer le polynôme $E(x)$ et les coefficients $C_{i,j}$, M_i et N_i.

• ***Exemple 2.13*:** Soit $F(x) = \dfrac{x^3 + 5x^2 + 8x}{(x+2)(x+3)}$

On effectue la division suivant les puissances croissantes, on obtient :$F(x) = x + \dfrac{2x}{(x+2)(x+3)}$

On écrit ensuite :

$\dfrac{2x}{(x+2)(x+3)} = \dfrac{C_1}{x+2} + \dfrac{C_2}{x+3}$, C_1 et C_2 étant des réels que l'on peut trouver par identification.

On obtient :$F(x) = x - \dfrac{4}{x+2} + \dfrac{6}{x+3}$

2.5.1.1 division de polynômes suivant les puissances décroissantes

Soient $P(x)$ et $Q(x)$ deux polnômes de degré p et q respectivement avec $p > q$. Diviser P par Q consiste à déterminer les polynômes E et R tels que :

$$P(x) = E(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

avec $degr(R) < degr(Q)$.

• ***Exemple 2.14*:** Soit $P(x) = x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 4x + 1$ et $Q(x) = x^2 + 3x + 1$. Divisons P par Q suivant les puissances décroissantes :

$$
\begin{array}{ccccccccc|c}
x^4 & + & 2x^3 & + & 5x^2 & + & 4x & + & 1 & x^2+3x+1 \\
 & & & & & & & & & ----------- \\
-(x^4 & + & 3x^3 & + & x^2) & & & & & x^2-x+7 \\
- & - & - & - & - & - & - & & & \\
 & - & x^3 & + & 4x^2 & + & 4x & & & \\
 & -(- & x^3 & - & 3x^2 & - & x) & & & \\
 & - & - & - & - & - & - & - & & \\
 & & & & 7x^2 & + & 5x & + & 1 & \\
 & & & - & (7x^2 & + & 21x & + & 7) & \\
 & & & - & - & - & - & - & - & \\
 & & & & & - & 16x & - & 6 &
\end{array}
$$

D'où : $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = x^2 - x + 7 + \dfrac{-16x - 6}{x^2 + 3x + 1}$ soit : $E(x) = x^2 - x + 7$ et $R(x) = -16x - 6$.

2.5.1.2 décomposition en éléments simples

On s'intéresse ici à la décomposition en éléments simples de la fraction de deux polynômes $R(x)$ et $Q(x)$ de degré r et q respectivement et tels que $r < q$.

Décomposer une telle fraction rationnelle en éléments simples consiste à déterminer les coefficients $C_{i,j}$, M_i et N_i.

$$\frac{R(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=0}^{\lambda_i} \frac{C_{i,j}}{(x - a_i)^{\lambda_i - j}} + \sum_{m}^{i=1} \frac{M_i x + N_i}{[(x - \alpha_i)^2 + \beta_i^2]^{k_i}}$$

où les a_i sont les m racines réelles d'ordre λ_i du polynôme $Q(x)$.

Nous présentons ici les cas les plus fréquents :

- Q admet des racines réelles d'ordre supérieur à 1
  exemple : Q admet 2 racines : a d'ordre 3 et b d'ordre 1 :

$$\frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{R(x)}{(x-a)^3(x-b)}$$

  Décomposer la fraction rationnelle en éléments simples consiste à déterminer les coefficients c_1, c_2, c_3 et d_1 tels que :

$$\frac{R(x)}{(x-a)^3(x-b)} = \frac{c_1}{(x-a)} + \frac{c_2}{(x-a)^2} + \frac{c_3}{(x-a)^3} + \frac{d_1}{(x-b)}$$

- Q admet des racines réelles et des complexes conjuguées
exemple : Q admet 2 racines réelles : a d'ordre 1 et b d'ordre 1 et deux racines complexes conjuguées :

$$\frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{R(x)}{(x-a)(x-b)(x^2+cx+d)}$$

avec $\Delta = c^2 - 4d < 0$
Décomposer la fraction rationnelle en éléments simples consiste à déterminer les coefficients α_1, α_2, β_1 et β_2 tels que :

$$\frac{R(x)}{(x-a)(x-b)(x^2+cx+d)} = \frac{\alpha_1}{(x-a)} + \frac{\alpha_2}{(x-b)} + \frac{\beta_1 x + \beta_2}{x^2+cx+d}$$

- Q admet des racines réelles et des complexes conjuguées d'ordre supérieur à 1
exemple : Q admet 1 racines réelles : a d'ordre 1 et deux racines complexes conjuguées d'ordre 2 :

$$\frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{R(x)}{(x-a)(x^2+cx+d)^2}$$

avec $\Delta = c^2 - 4d < 0$
Décomposer la fraction rationnelle en éléments simples consiste à déterminer les coefficients α_1, β_1, β_2, γ_1 et γ_2 tels que :

$$\frac{R(x)}{(x-a)(x^2+cx+d)^2} = \frac{\alpha_1}{(x-a)} + \frac{\beta_1 x + \beta_2}{x^2+cx+d} + \frac{\gamma_1 x + \gamma_2}{(x^2+cx+d)^2}$$

- ***Exemple 2.15*****:** Soit la fraction rationnelle :$F(x) = \dfrac{x^2+3x}{x^4+2x^3+2x^2+2x+1} = \dfrac{R(x)}{Q(x)}$

Factorisons $Q(x)$, -1 étant racine double du polynôme, on a :
$Q(x) = (x+1)^2(x^2+1)$
Décomposer$F(x)$ en élements simples revient à déterminer les coeficients A,B, C et D tels que :
$\dfrac{x^2+3x}{(x+1)^2(x^2+1)} = \dfrac{A}{x+1} + \dfrac{B}{(x+1)^2} + \dfrac{Cx+D}{(x^2+1)}$
En réduisant au même dénominateur, on trouve :

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{A(x+1)(x^2+1) + B(x^2+1) + (Cx+D)(x+1)^2}{(x+1)^2(x^2+1)} \\ &= \frac{x^3(A+C) + x^2(A+B+2C+D) + x(A+C+2D) + (A+B+D)}{(x+1)^2(x^2+1)} \end{aligned}$$

Par identification, on a :

$$\begin{cases} A+C=0 \\ A+B+2C+D=1 \\ A+C+2D=3 \\ A+B+D=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -\dfrac{1}{2} \\ B = -1 \\ C = \dfrac{1}{2} \\ D = \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

D'où : $F(x) = \dfrac{1}{2}\left[-\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{(x+1)^2} + \dfrac{x+3}{(x^2+1)}\right]$

- ***Exemple 2.16*****:** Soit la fraction rationnelle :$F(x) = \dfrac{x^2}{(x^2-4)(x^2+1)^2} = \dfrac{R(x)}{Q(x)}$

Décomposer$F(x)$ en élements simples revient à déterminer les coeficients A,B, α_1, α_2, β_1 et β_2 tels que :
$F(x) = \dfrac{x^2}{(x^2-4)(x^2+1)^2} = \dfrac{A}{x-2} + \dfrac{B}{x+2} + \dfrac{\alpha_1 x + \alpha_2}{(x^2+1)} + \dfrac{\beta_1 x + \beta_2}{(x^2+1)^2}$

$F(-x) = \dfrac{x^2}{(x^2-4)(x^2+1)^2} = \dfrac{A}{-x-2} + \dfrac{B}{-x+2} + \dfrac{-\alpha_1 x + \alpha_2}{(x^2+1)} + \dfrac{-\beta_1 x + \beta_2}{(x^2+1)^2}$
On peut remarque que $F(x) = F(-x)$. La décomposition en éléments simple étant unique, on a : $A = -B$,$\alpha_1 = -\alpha_1$ et $\beta_1 = -\beta_1$, donc $\alpha_1 = \beta_1 = 0$ d'où :
$F(x) = \dfrac{x^2}{(x^2-4)(x^2+1)^2} = \dfrac{A}{x-2} - \dfrac{A}{x+2} + \dfrac{\alpha_2}{(x^2+1)} + \dfrac{\beta_2}{(x^2+1)^2}$
En multipliant par $x-2$ et en appliquant la formule pour $x = 2$, on obtient :
$(x-2)F(2) = \dfrac{2^2}{(2^2-4)(2^2+1)^2} = A$, soit $A = \dfrac{1}{25}$
En multipliant par $(x^2+1)^2$ et en appliquant la formule pour $x^2 = -1$, on obtient :
$\beta_2 = \dfrac{1}{5}$
On a donc : $F(x) = \dfrac{1}{25(x-2)} - \dfrac{1}{25(x+2)} + \dfrac{\alpha_2}{(x^2+1)} + \dfrac{1}{5(x^2+1)^2}$
En appliquant cette relation pour $x = 0$, on obtient $\alpha_2 = -\dfrac{4}{25}$
d'où : $F(x) = \dfrac{1}{25(x-2)} - \dfrac{1}{25(x+2)} + \dfrac{4}{25(x^2+1)} + \dfrac{1}{5(x^2+1)^2}$

2.5.1.3 intégration des éléments simples de première espèce

L'intégration des éléments simples de première espèce ne pose pas de problème particulier :

$$\text{si } k \neq 1, \quad \int \frac{1}{(x-a)^k} dt = \frac{1}{(k-1)(x-a)^{k-1}} + C, \text{ ou } \int \frac{1}{(x-a)} dt = \ln|x-a| + C$$

2.5.1.4 intégration des éléments simples de deuxième espèce

L'intégration des éléments simples de deuxième espèce est plus délicate.
On écrit $\dfrac{1}{(x^2+cx+d)^k} = \dfrac{1}{\left[(x-\alpha)^2+\beta^2\right]k}$
et on effectue le changement de variable : $t = \dfrac{x-\alpha}{\beta}$
On a alors : $x = \alpha + \beta t$ et $dx = \beta dt$
Intégrer les éléments de deuxième espèce $\displaystyle\int \frac{Ax+B}{\left[(x-\alpha)^2+\beta^2\right]k} dx$ revient à intégrer :
$H = \displaystyle\int \frac{A(\alpha+\beta t)+B}{\beta^{2k}\left[1+t^2\right]^k} \beta dt$
On est donc ramené au calcul des intégrales : $I_k = \displaystyle\int \frac{tdt}{\left[1+t^2\right]^k}$ et $J_k = \displaystyle\int \frac{dt}{\left[1+t^2\right]^k}$.

- Calcul de $I_k = \displaystyle\int \frac{tdt}{\left[1+t^2\right]^k}$
  on pose : $u = 1+t^2$ soit $du = 2tdt$
  $I_k = \displaystyle\int \frac{tdt}{\left[1+t^2\right]^k} = \int \frac{du}{2u^k}$
  ◇ si $k = 1$, $I_1 = \dfrac{1}{2}\ln|u| + C = \dfrac{1}{2}\ln\left|1+t^2\right| + C$

$$I_1 = \frac{1}{2}\ln\left|1 + \frac{x-\alpha}{\beta}^2\right| + C$$

  où C est une constante réelle.
  ◇ si $k > 1$ $I_k = -\dfrac{1}{2(k-1)(u)^{k-1}} + C = -\dfrac{1}{2(k-1)(1+t^2)^{k-1}} + C$

$$I_k = -\frac{1}{2(k-1)\left[1+\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right))^2\right]^{k-1}} + C$$

  où C est une constante réelle.

- Calcul de $J_k = \displaystyle\int \frac{dt}{[1+t^2]^k}$

  En intégrant par partie, on établit une relation de récurrence entre J_k et J_{k-1} :

$$J_k = \frac{2k-3}{2k-2} J_{k-1} + \frac{\dfrac{x-\alpha}{\beta}}{2(k-1)\left[1+\left(\dfrac{x-\alpha}{\beta}\right)^2\right]^{k-1}}$$

  Cette relation appliquée de proche en proche permet de se ramener en définitive au calcul de

$$J_1 = \int \frac{dt}{1+t^2} = \arctan(t) + C = \arctan\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right) + C$$

  où C est une constante réelles

- ***Exemple 2.17*:** Calculer l'intégrale indéfinie $I = \displaystyle\int \frac{dx}{x^3+1}$

Soit $F(x) = \dfrac{1}{x^3+1}$. Le dénominateur s'écrit :

$$x^3 = 1 = (x+1)(x^2-x+1)$$

Le polynôme $x^2 - x + 1$ est irréductible dans $\mathbb{R}$. La décomposition en éléments simple de $F(x)$ donne : $F(x) = \dfrac{1}{x^3+1} = \dfrac{A}{x+1} + \dfrac{Bx+C}{x^2-x+1}$

L'identification des constantes conduit à : $A = \dfrac{1}{3}$, $B = -\dfrac{1}{3}$ et $C = \dfrac{2}{3}$. D'où : $F(x) = \dfrac{1}{3(x+1)} + \dfrac{-x+2}{3(x^2-x+1)}$

On a alors : $I = \displaystyle\int \frac{dx}{x^3+1} = \int \frac{dx}{3(x+1)} + \underbrace{\int \frac{-x+2}{3(x^2-x+1)}dx}_{J}$

Calculons $J = \displaystyle\int \frac{-x+2}{3(x^2-x+1)}dx$

$$\begin{aligned}
J &= \tfrac{1}{3}\int \frac{-(2x-1)+3}{2(x^2-x+1)}dx \\
&= \tfrac{1}{3}\int \frac{-(2x-1)}{2(x^2-x+1)}dx + \int \frac{3}{2(x^2-x+1)}dx \\
&= -\tfrac{1}{6}\ln\left|x^2-x+1\right| + \frac{3}{2}\int \frac{dx}{\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2)} \\
&= -\tfrac{1}{6}\ln\left|x^2-x+1\right| + \frac{3}{2}\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right] \\
&= -\tfrac{1}{6}\ln\left|x^2-x+1\right| + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right]
\end{aligned}$$

D'où :
$I = \dfrac{1}{3}\ln|x+1| + \tfrac{1}{6}\ln\left|x^2-x+1\right| + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left[\dfrac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\dfrac{1}{2}\right)\right]$.