ALGÈBRE LINÉAIRE
Module 2
PAD - Exercices

S. Rigal, D. Ruiz, et J. C. Satgé

January 4, 2009

Table des Matières

Chapitre 3

Projecteurs, symétries – Optimisation

3-1 Exercices corrigés

3-1.1 Exercice 7a – Projection orthogonale

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 2. Soit φ le produit scalaire défini sur E^2 par :

$$\varphi(P;Q) = P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(2)Q(2)$$

Soit f la projection orthogonale sur le sous espace $E = \mathbb{R}_1[X]$

1. Déterminer un polynôme P_1 orthogonal à la famille :$\{1;X\}$.
2. Ecrire A la matrice de f dans la base $\{1;X;P_1\}$.
3. En déduire B la matrice de f dans la base canonique de E.
4. Déterminer alors le projeté orthogonal du polynôme $2X^2 + 3X + 4$.
5. Vérifier de deux façons que $X^2 - 1$ est un polynôme annulateur de f.

Corrigé :

1. Déterminer un polynôme $P_1 = aX^2 + bX + c$ orthogonal à la famille $\{1;X\}$:
   Il faut donc que $\varphi(P_1;1) = 0$ et que $\varphi(P_1;X) = 0$
   Soit $5a+3b+3c = 0$ et $9a+5b+3c = 0$. Ce qui correspond à $P_1 = a(X^2 - 2X + \frac{1}{3})$, et on peut choisir $a = 1$.
2. La matrice de f dans la base $\{1;X;P_1\}$ est
   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
   puisque les composantes dans l'espace sur lequel on projette sont conservées (valeur propre 1) et celles dans l'espace selon lequel on projette (son orthogonal, $\mathsf{Vect}\,\{P_1\}$) sont annulées (valeur propre 0).
3. La matrice B de f dans la base canonique de E est donnée par la relation de similitude suivante:
   $$B = PAP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
   issue du changement de base pour passer de la base canonique à la base $\{1;X;P_1\}$ dans laquelle l'opérateur f est *naturellement* diagonalisé.

4. Le projeté orthogonal du polynôme $2X^2+3X+4$ s'obtient facilement par le produit matriciel:
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{10}{3} \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$$
qui donne ses composantes dans la base canonique. C'est donc le polynôme $\frac{10}{3}+7X$.

5. Vérifier de deux façons que $X^2 - X$ est un polynôme annulateur de f.
Il suffit de vérifier que $A^2 = A$ ou que $B^2 = B$.

3-1.2 Exercice 8a – Régression linéaire

Soient $(P_i)_{1 \leq i \leq N} = (x_i, y_i)_{1 \leq i \leq N}$ un ensemble de N points de $\mathbb{R}^2$. On se propose d'étudier un ajustement linéaire de ces N points par une droite du type $y = ax + b$. La méthode consiste donc a minimiser la somme des erreurs du modèle, soit la quantité

$$E(a, b) = \sum_{i=1}^{N} e_i^2 = \sum_{i=1}^{N} (y_i - ax_i - b)^2 \ .$$

Il s'agit là d'une technique très utilisée en statistique, lorsque l'on pressent (par exemple à partir d'une représentation graphique des données) une dépendance affine entre les observations.

1. Mettre le problème précédent sous forme d'un problème de moindre carrés linéaires.

2. Caractériser la solution à l'aide du théorème de projection orthogonale sur une variété linéaire à préciser, et donner l'expression de la solution.

On mesure la longueur l d'un barreau métallique chauffé à la température θ sous la pression P. Les mesures conduisent à postuler que l'allongement est régi par une loi de la forme
$$l = (a\theta + b\theta^3)e^{-cP}$$
où a, b et$c$ sont trois paramètres du modèle à estimer. On effectue m mesures $(\theta_k, P_k, l_k)_{k=1,m}$ de longueur dans différentes conditions de température et de pression.

3. On suppose connue la valeur du paramètre c. Proposer une méthode d'estimation par moindres carrés linéaires de a et b.

4. Caractériser la solution à l'aide du théorème de projection orthogonale sur une variété linéaire à préciser.

Corrigé :

1. Le problème de la régression linéaire est très facile à modéliser sous forme d'un problème de moindres carrés linéaire. Considérons par exemble que les inconnues (les coefficients a et b de la droite $y = a \times x + b$ que l'on cherche) constituent le vecteur $\alpha \in \mathbb{R}^2$, que le vecteur $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^N$ est constitué des composantes y_i, $i = 1, \ldots, N$, et que la matrice $\mathbf{X} \in \mathcal{M}_{N,2}(\mathbb{R})$ est constituée du vecteur colonne des x_i, $i = 1, \ldots, N$, et du vecteur colonne de taille N avec que des 1 comme composantes :
$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_N & 1 \end{pmatrix} .$$
Avec ces notations, notre problème de moindres carrés revient en fait à trouver $\alpha \in \mathbb{R}^2$ tel que $\|\mathbf{y} - \mathbf{X}\alpha\|^2$ soit minimale (la norme étant la norme euclidienne classique).

2. Du point de vue géométrique, cela revient à touver le vecteur $\mathbf{z} = \mathbf{X}\alpha$ appartenant donc à $Im(\mathbf{X})$, sous espace vectoriel de dimension 2 dans $\mathbb{R}^N$, qui soit le plus proche (au sens de la distance euclidienne) du vecteur $\mathbf{y}$ de $\mathbb{R}^N$.

   Le théorème de projection orthogonale assure l'existence et l'unicité du vecteur $\mathbf{z} \in Im(\mathbf{X})$. La caractérisation géométrique de la projection orthogonale c'est que $(\mathbf{y} - \mathbf{z}) \perp Im(\mathbf{X})$, ce qui revient à écrire que
$$\forall \beta \in \mathbb{R}^2 , \quad \langle \mathbf{X}\beta, \mathbf{y} - \mathbf{z} \rangle = 0 ,$$
ou de manière équivalente que
$$\forall \beta \in \mathbb{R}^2 , \quad \beta^T \mathbf{X}^T (\mathbf{y} - \mathbf{z}) = 0$$
puisque pour deux vecteurs $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$, le produit scalaire canonique $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ est égal au produit $\mathbf{a}^T\mathbf{b}$ (juste en remarque: c'est aussi égal au produit $\mathbf{b}^T\mathbf{a}$ – symétrie du produit scalaire). Pour finir, l'égalité ci dessus étant valable quel que soit $\beta \in \mathbb{R}^2$, on peut en conclure que le vecteur $\mathbf{X}^T(\mathbf{y} - \mathbf{z})$ est nul dans $\mathbb{R}^2$, et donc que
$$\mathbf{X}^T\mathbf{y} = \mathbf{X}^T\mathbf{X}\alpha \; (= \mathbf{X}^T\mathbf{z} \,) \, .$$
On retrouve donc la caractérisation algébrique de toute solution du problème aux moindres carrés linéaire considéré, et on peut conclure que si la matrice $\mathbf{X}$ est de rang maximal (égal à 2), alors la matrice 2×2 $(\mathbf{X}^T\mathbf{X})$ est symétrique définie positive, donc inversible, et la solution est donnée par
$$\alpha = (\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{y} \, .$$
Pour mémoire (justification de l'assertion précédente): la symétrie de $\mathbf{A} = (\mathbf{X}^T\mathbf{X})$ est triviale, sa positivité résulte du fait que $\beta^T(\mathbf{X}^T\mathbf{X})\beta = \|\mathbf{X}\beta\|^2 \geq 0$, ceci quelque

soit le vecteur $\beta \in \mathbb{R}^2$, et pour finir $\beta^T(\mathbf{X}^T\mathbf{X})\beta = 0 \;\Leftrightarrow\; \|\mathbf{X}\beta\|^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; \mathbf{X}\beta = \vec{0}$, ce qui équivaut à $\beta = \vec{0}$ sous réserve que $\mathbf{X}$ soit de rang 2, c'est à dire que ses deux colonnes soient linéairement indépendantes.

Cette dernière hypothèse mérite une petite remarque: en effet, si jamais les deux colones de $\mathbf{X}$ étaient linéairement dépendantes, alors on aurait tous les x_i égaux et le nuage de points observés $(P_i)_{1\leq i\leq N} = (x_i, y_i)_{1\leq i\leq N}$ serait aligné sur une droite verticale. Il est clair que dans ce cas il n'est pas possible de trouver une droite d'équation $(y = a \times x + b)$ qui passe par ce nuage de points (pour avoir une droite verticale, il faudrait que la pente a soit infinie). L'hyphothèse que $\mathbf{X}$ soit de rang maximal est donc une hypothèse *naturelle* pour ce problème, si on veut qu'il soit bien posé (cela relève de la modélisation, en amont de la résolution algébrique).

3. Dans cette deuxième partie de l'exercice, il est clair que si le coefficient c nous est donné, alors on peut ramener le modèle à une expression linéaire dans les deux seules inconnues a et b. On pose

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \theta_1 & \theta_1^3 \\ \theta_2 & \theta_2^3 \\ \vdots & \vdots \\ \theta_m & \theta_m^3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} l_1\, e^{cP_1} \\ l_2\, e^{cP_2} \\ \vdots \\ l_m\, e^{cP_m} \end{pmatrix},$$

et on peut alors écrire que le problème revient à trouver $\alpha = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ tel que $\mathbf{A}\alpha = \mathbf{y}$.

4. Pour finir, on résoud ce problème linéaire au sens des moindres carrés, c'est à dire que on cherche $\alpha \in \mathbb{R}^2$ tel que $\|\mathbf{y} - \mathbf{A}\alpha\|^2$ soit minimale, la solution étant donnée par

$$\alpha = (\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{y} \ ,$$

sous réserve que $\mathbf{A}$ soit de rang 2 (c'est à dire que les températures observées θ_i ne soient pas toutes égales).

Une dernière remarque, du point de vue numérique celle là: il sera préférable dans les mesures de ne pas avoir des valeurs de la température qui soient trop étalées, car sinon on aura de grandes disparités d'échelle dans les valeurs numériques de la matrice $\mathbf{A}$ (à cause du terme en θ^3), ce qui rendra difficile la résolution du problème ci-dessus en arithmétique finie (sur ordinateur).

3-1.3 Exercice 9a – Polynômes de Legendre

On considère l'espace vectoriel $H = L^2(-1,1)$ des fonctions dites *d'énergie finie* sur $[-1,1]$, muni du produit scalaire :

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)\, g(x)\, dx \ ,$$

et on considère les polynômes

$$\mathcal{P}_n(x) = \frac{1}{2^n\, n!} \frac{d^n}{dx^n} \left([x^2 - 1]^n \right) \ , \quad n \in \mathbb{N} \ .$$

1. Vérifier que la famille $\{\mathcal{P}_n \, , \ n \in \mathbb{N}\}$ est une famille orthogonale dans H, et en déduire une famille orthonormée $\{\mathcal{Q}_n \, , \ n \in \mathbb{N}\}$ de H.

2. Soit f un élément de H. Comment obtenir un polynôme de degré $\leq N$ qui soit la meilleure approximation de f au sens de la norme de H ?

3. En utilisant le développement du binôme, donner l'expression de $\mathcal{P}_5$ et en déduire les valeurs de a, b, c, d, e qui minimisent l'intégrale :

$$\int_{-1}^{1} (x^5 - ax^4 - bx^3 - cx^2 - dx - e)^2 \, dx \ .$$

On rappelle, pour les besoins de cet exercice, la formule de Wallis :

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1} \theta \, d\theta \ = \ \frac{(2^n\, n!)^2}{(2n+1)!} \ .$$

Corrigé :

1. Considérons (sans perte de généralité) que $n \geq m$ et étudions le produit scalaire de $\mathcal{P}_n$ avec $\mathcal{P}_m$:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{P}_n, \mathcal{P}_m \rangle \ &= \ \frac{1}{2^{n+m}\, n!\, m!} \int_{-1}^{1} \frac{d^n}{dx^n} \left([x^2 - 1]^n \right) \ \frac{d^m}{dx^m} \left([x^2 - 1]^m \right) \ dx \\ &= \ \frac{1}{2^{n+m}\, n!\, m!} \left[\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left([x^2 - 1]^n \right) \ \frac{d^m}{dx^m} \left([x^2 - 1]^m \right) \right]_{-1}^{1} \\ &- \ \frac{1}{2^{n+m}\, n!\, m!} \int_{-1}^{1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left([x^2 - 1]^n \right) \ \frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}} \left([x^2 - 1]^m \right) \ dx \ . \end{aligned}$$

   Comme dans le polynôme $(x^2-1)^n$, -1 et 1 sont toutes deux racines de multiplicité n, -1 et 1 restent racines de multiplicité supérieure ou égale à 1 dans toute dérivé d'ordre strictement inférieure à n de ce polynôme. Par conséquent, la partie principale ci-dessus, produit de 2 polynômes dont le premier a -1 et 1 comme racines, est nulle. On se retrouve alors avec

$$\langle \mathcal{P}_n, \mathcal{P}_m \rangle \ = \ -\frac{1}{2^{n+m}\, n!\, m!} \int_{-1}^{1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left([x^2 - 1]^n \right) \ \frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}} \left([x^2 - 1]^m \right) \ dx \ .$$

   On itère les intégrations par parties n-fois avec, toujours pour les mêmes raisons, la partie principale qui est nulle, et on obtient:

$$\langle \mathcal{P}_n, \mathcal{P}_m \rangle \ = \ (-1)^n \frac{1}{2^{n+m}\, n!\, m!} \int_{-1}^{1} \left([x^2 - 1]^n \right) \ \frac{d^{m+n}}{dx^{m+n}} \left([x^2 - 1]^m \right) \ dx \ .$$

   Deux cas se présentent alors:

- soit $n > m$ et, dans ces conditions, le deuxième polynôme dans l'intégrale ci-dessus est nul car on dérive plus de $2m$ fois le polynôme ($[x^2-1]^m$) de degré $2m$, et on en conclut donc que $\langle \mathcal{P}_n, \mathcal{P}_m \rangle = 0$, ce qui établit l'orthogonalité de $\mathcal{P}_n$ avec $\mathcal{P}_m$ au sens du produit scalaire considéré.
- soit $n = m$ et on a alors

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{P}_n, \mathcal{P}_n \rangle &= (-1)^n \frac{1}{(2^n\, n!)^2} \int_{-1}^{1} \left([x^2-1]^n\right) \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} \left([x^2-1]^n\right)\, dx \\ &= (-1)^n \frac{(2n)!}{(2^n\, n!)^2} \int_{-1}^{1} \left([x^2-1]^n\right)\, dx\,.\end{aligned}$$

Pour finir, un argument de parité et un changement de variable en ($x = \sin\theta$) nous donne (d'après la formule de Wallis):

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{P}_n, \mathcal{P}_n \rangle &= (-1)^n \frac{1}{(2^n\, n!)^2}\, 2(-1)^n \int_{0}^{\pi/2} \cos^{2n+1}\theta\, d\theta \\ &= \frac{2\,(2n)!}{(2^n\, n!)^2} \frac{(2^n\, n!)^2}{(2n+1)!} \\ &= \frac{2}{2n+1}\end{aligned}$$

valeur qui représente la norme au carré de $\mathcal{P}_n$ au sens du produit scalaire considéré.

Une famille orthonormée serait donc la famille des

$$\left\{ \sqrt{\frac{2n+1}{2}} \mathcal{P}_n\,,\ n \in \mathbb{N} \right\}\,.$$

2. Soit $V_N \subset H$ le sous-espace vectoriel des polynômes de degré au plus N (qui est de dimension $N+1$), et soit $E = V_N + \mathsf{Vect}\{f\}$ le sous espace de H constitué des polynômes de degré au plus N complété par la droite vectorielle engendrée par le vecteur f. E est de manière évidente un sous-espace vectoriel de H de dimension finie ($\dim E \leq N+2$), contenant les polynômes de degré au plus N ainsi que f, et E muni du produit scalaire de H est un espace euclidien. Le théorème de projection orthogonale dans l'espace euclidien E de f sur V_N assure l'existence d'un vecteur $\mathcal{U}_N \in V_N$ (polynôme de degré $\leq N$) qui minimise la distance de f à tout élément de V_N, c'est à dire que $\mathcal{U}_N$ est la meilleure approximation de f sur V_N.

   De plus, la famille $\{\mathcal{P}_n\,,\ 0 \leq n \leq N\}$ est une famille orthogonale donc libre dans V_N, et elle constitue donc d'une famille libre de $N+1$ vecteurs dans V_N de dimension $N+1$. Par conséquent la famille $\{\mathcal{P}_n\,,\ 0 \leq n \leq N\}$ est une base orthogonale de V_N. En exprimant formellement $\mathcal{U}_N \in V_N$ comme combinaison linéaire de ces vecteurs de base:

$$\mathcal{U}_N = \sum_{i=0}^{N} \alpha_i \mathcal{P}_i\,,$$

le corollaire 3-1.1 page 39 (section 3-1 – projecteurs et symétries) nous indique que les coefficients α_i sont les composantes de la solution du système de Gram:

$$\mathbf{G}\alpha = \mathbf{b}\,,$$

avec

$$\begin{array}{l} \mathbf{G} = (g_{ij})_{1\le i,j\le n} \ \text{ et } \ g_{ij} = \langle \mathcal{P}_j\,,\,\mathcal{P}_i\rangle \\ \mathbf{b} = (b_i)_{1\le i\le n} \ \text{ et } \ b_i = \langle f\,,\,\mathcal{P}_i\rangle\,, \end{array}$$

et où la matrice $\mathbf{G}$, constituée des produits scalaires des vecteurs de base 2 à 2, est diagonale puisque la base considérée est orthogonale. On en déduit donc l'expression des coefficients du développement de $\mathcal{U}_N$ dans la base orthogonale $\{\mathcal{P}_n\,,\ 0\le n\le N\}$ de V_N:

$$\alpha_i \;=\; \frac{\langle f\,,\,\mathcal{P}_i\rangle}{\langle \mathcal{P}_i\,,\,\mathcal{P}_i\rangle}\,,\quad 0\le i\le N\,,$$

et la meilleure approximation de f dans V_N est donc donnée par la combinaison linéaire:

$$\mathcal{U}_N \;=\; \sum_{i=0}^{N} \frac{2i+1}{2}\,\langle f\,,\,\mathcal{P}_i\rangle\,\mathcal{P}_i\,.$$

3. La formule du binôme nous donne:

$$(x^2-1)^5 \;=\; x^{10} - 5x^8 + 10x^6 - 10x^4 + 5x^2 - 1$$

et en le dérivant 5 fois et en divisant par ($2^5 \times 5! = 32\times 120$), on obtient l'expression de $\mathcal{P}_5$:

$$\mathcal{P}_5(x) \;=\; \frac{63}{8}x^5 - \frac{70}{8}x^3 + \frac{15}{8}x\,.$$

Pour finir, déterminer les valeurs de a, b, c, d, e qui minimisent l'intégrale :

$$\int_{-1}^{1} (x^5 - ax^4 - bx^3 - cx^2 - dx - e)^2\,dx$$

revient en fait à trouver le polynôme $\mathcal{U}_4(x) \;=\; ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ de degré 4 tel que la distance au carré $\|x^5 - \mathcal{U}_4\|^2$ soit minimale (la norme étant celle associée au produit scalaire sur H).

Il s'agit donc de trouver la meilleure approximation de $f(x) = x^5$ dans le sous espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 4. On pourrait alors appliquer les résultats de la question précédente: il faudrait, pour cela, déterminer les polynômes $\mathcal{P}_0, \ldots, \mathcal{P}_4$ vecteurs de base orthogonaux engendrant le sous-espace V_4, puis calculer les 5 produits scalaires $\langle x^5\,,\,\mathcal{P}_i\rangle$, $i = 0, \ldots, 4$, pour enfin en déduire par combinaison linéaire l'expression du polynôme $\mathcal{U}_4$ recherché.

Pour autant, dans ce cas particulier, on peut faire beaucoup plus rapide, en remarquant que $E = V_4 + \mathsf{Vect}\{x^5\}$ est directement égal à V_5 l'espace des polynômes de degré au plus 5. Dans la base orthogonale $\{\mathcal{P}_i\,,\ 0 \leq i \leq 5\}$ qui engendre V_5, x^5 se développe sous la forme:

$$x^5 \;=\; \sum_{i=0}^{5} \frac{2i+1}{2}\,\langle x^5\,,\,\mathcal{P}_i\rangle\,\mathcal{P}_i(x)\,,$$

et on en déduit, par soustraction avec le terme en $\mathcal{P}_5(x)$, que:

$$x^5 - \frac{11}{2}\,\langle x^5\,,\,\mathcal{P}_5\rangle\,\mathcal{P}_5(x) \;=\; \sum_{i=0}^{4} \frac{2i+1}{2}\,\langle x^5\,,\,\mathcal{P}_i\rangle\,\mathcal{P}_i(x) \;=\; \mathcal{U}_4(x)\,.$$

Interprétation géométrique: on aurait pu aussi faire la remarque que V_4 et $\mathit{Vect}\{\mathcal{P}_5\}$ sont en somme directe orthogonale dans V_5, et donc que, dans V_5, la projection orthogonale sur V_4 est égale à l'identité moins la projection orthogonale sur $\mathit{Vect}\{\mathcal{P}_5\}$.

Pour finir: comme seul le polynôme $\mathcal{P}_5$ contient le monôme x^5 dans son développement, il faut nécessairement que le terme $\frac{11}{2}\,\langle x^5\,,\,\mathcal{P}_5\rangle$ soit égal à $\frac{8}{63}$ pour que l'égalité précédente ait lieu, ce qui nous épargne même le calcul du produit scalaire $\langle x^5\,,\,\mathcal{P}_5\rangle$. Ainsi, on en conclut que:

$$\mathcal{U}_4(x) \;=\; x^5 - \frac{8}{63}\,\mathcal{P}_5(x) \;=\; \frac{70}{63}x^3 - \frac{15}{63}x\,.$$

3-2 Exercices avec indications seulement

3-2.1 Exercice 7b

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 2.
Soit φ le produit scalaire défini par :

$$\varphi(P;Q) = \int_0^1 P(x)Q(x)dx$$

Soit f la projection orthogonale sur le sous espace $E = \mathbb{R}_1[X]$

1. Déterminer un polynôme P_1 orthogonal à la famille :$\{1; X\}$.
2. Ecrire A la matrice de f dans la base canonique de E.
3. Déterminer le projeté orthogonal du polynôme $2X^2 + 3X + 4$.

Indications :

1. Ecrire les relations d'orthogonalité et en déduire le polynôme P_1 (déterminé à une constante multiplicative près).
2. Appliquer le changement de base à la matrice de f dans la base $\{1; X; P_1\}$.
3. Faire le produit matrice-vecteur de la matrice précédente avec le vecteur $(4; 3; 2)^T$.

3-2.2 Exercice 8b – Moindres carrés pondérés

1. Résoudre au sens des moindres carrés le système algébrique linéaire surdéterminé :

$$\begin{cases} x + y &= 0 \\ x + 2y &= 1 \\ 2x + 3y &= 2 \end{cases}$$

   c'est à dire déterminer $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que la valeur

$$E(x, y) = (x + y - 0)^2 + (x + 2y - 1)^2 + (2x + 3y - 2)^2$$

   soit minimale. Interprétez géométriquement le résultat (faire un dessin).

2. On multiplie la première équation par 2. Résoudre le nouveau système au sens des moindres carrés et comparer avec le résultat de la première question.
   Interprétez le résultat.

3. Généralisation :
   On considère le système linéaire surdéterminé

$$(1) \qquad \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\,,$$

   où $\mathbf{A}$ est une matrice rectangulaire de type $m \times n$ ($m > n$), $\mathbf{b}$ est un vecteur de $\mathbb{R}^m$, et $\mathbf{x}$ est un vecteur inconnu de $\mathbb{R}^n$.

   Compte tenu des facteurs d'échelle ainsi que des erreurs de mesure dans la détermination des coefficients du système (1), on pondère chaque équation de ce système par un poids positif $\omega_i > 0$ relatif à la précision des coefficients dans l'équation numéro i.

   Ainsi, au lieu de trouver $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ qui minimise $E(\mathbf{x}) = \|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2^2$, on va chercher à minimiser

$$E_{\mathbf{W}}(\mathbf{x}) = \|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_{\mathbf{W}}^2\,,$$

   où $\mathbf{W} = \mathrm{Diag}(\omega_1, \ldots, \omega_m)$ et, pour tout vecteur $\mathbf{y}$ de $\mathbb{R}^m$,

$$\|\mathbf{y}\|_{\mathbf{W}}^2 = \mathbf{y}^T\mathbf{W}\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{m} \omega_i y_i^2.$$

   Montrer que une telle solution $\mathbf{x}$ existe bien, et donner une caractérisation matricielle de la solution de ce problème de minimisation.

Indications :

1. Ecrire le problème sous la forme $\min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^2} \|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|^2$ (où la norme est la norme euclidienne classique), et en déduire le système 2×2 qui caractérise la solution. Le résoudre, et représenter graphiquement dans le plan le point solution ainsi que les 3 droites qui correspondent aux trois lignes du système 3×2 initial.

2. Faire de même que précédemment et, sur le même dessin, positionner le nouveau point et commenter.

3. Dans cette question, il s'agit de raisonner géométriquement comme dans le cas des autres exercices. Le produit scalaire a changé, mais les propriétés intrinsèques restent les mêmes, à savoir que le problème revient à trouver un vecteur $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ appartenant donc à $Im(\mathbf{A})$ qui soit le plus proche du vecteur $\mathbf{b}$ en norme $\|\cdot\|_{\mathbf{W}}$. Il s'agit donc d'une projection $\mathbf{W}$-*orthogonale* sur $Im(\mathbf{A})$, et la propriété géométrique qui caractérise toute projection orthogonale dans un produit scalaire donné doit vous conduire à la caractérisation algébrique de la solution:

$$\mathbf{A}^T\mathbf{W}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}^T\mathbf{W}\mathbf{b}\,.$$

3-2.3 Exercice 9b – Décomposition spectrale

Soit $f \in \mathrm{L}^2(a,b)$. On considère le problème différentiel suivant :

$$(\mathcal{P}) \left\{ \begin{array}{llll} \text{trouver} & u \in \mathrm{L}^2(a,b) & & t.q. \\ & -u'' = f & & \text{dans } \mathrm{L}^2(a,b) \\ & u(a) = u(b) = 0 & & \end{array} \right.$$

On va chercher à approcher la solution de $(\mathcal{P})$ en la décomposant dans un sous-espace vectoriel particulier.

1. Le but de cette première question est de caractériser les solutions particulières (fonctions propres et valeurs propres) $(\phi, \lambda) \in \mathcal{C}^2(a,b) \times \mathbb{R}$ du problème

$$(\mathcal{P}(\lambda)) \left\{ \begin{array}{llll} \text{trouver} & \phi \in \mathcal{C}^2(a,b) & & t.q. \\ & -\phi'' = \lambda\phi & & \\ & \phi(a) = \phi(b) = 0 & & \end{array} \right. .$$

   - Vérifier que si $(\phi, \lambda) \in \mathcal{C}^2(a,b) \times \mathbb{R}$ est solution du problème $(\mathcal{P}(\lambda))$, alors

$$\lambda \|\phi\|^2_{\mathrm{L}^2(a,b)} = \|\phi'\|^2_{\mathrm{L}^2(a,b)} .$$

   - En déduire que λ est nécessairement strictement positif, et que, dans ces conditions, les solutions particulières recherchées sont

$$\phi_k(x) = \sin(\sqrt{\lambda_k}(x-a)) , \quad \text{avec} \quad \lambda_k = \frac{k^2\pi^2}{(b-a)^2} , \quad k \in \mathbb{N}^* .$$

2. Montrer que pour deux fonctions u et v de $\mathcal{C}^2(a,b) \times \mathbb{R}$, vérifiant les conditions aux limites du problème $(\mathcal{P}(\lambda))$, on a

$$(-u'', v)_{\mathrm{L}^2(a,b)} = (u, -v'')_{\mathrm{L}^2(a,b)} ,$$

   et en déduire que les fonctions propres déterminées à la question précédente sont orthogonales dans $\mathrm{L}^2(a,b)$.

3. Exprimer la projection orthogonale $\tilde{f}$ de f sur le sous-espace engendré par les N premières fonctions propres déterminées précédemment.

4. En écrivant formellement $\tilde{u} \in \mathcal{C}^2(a,b)$ comme combinaison linéaire de ces N premières solutions particulières

$$\tilde{u} = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \phi_k$$

   déterminer les coefficients α_k, $k = 1, \ldots, N$, tels que

$$-\tilde{u}'' = \tilde{f} .$$

5. Montrer que $\tilde{u}$ ainsi déterminée vérifie bien les conditions aux limites du problème $(\mathcal{P})$, et interpréter le résultat. Quelle approximation réalise $\tilde{u}$ par rapport à la solution du problème général $(\mathcal{P})$?

Indications :

1. Ecrire $\lambda\|\phi\|^2_{\mathrm{L}^2(a,b)} = \int_a^b \lambda\phi^2(x)\,dx$, puis exploiter le fait que ϕ est solution du problème $(\mathcal{P}(\lambda))$ ainsi qu'une petite intégration par parties pour obtenir l'égalité recherchée.

   Le fait que $\lambda \geq 0$ découle trivialement de cette égalité. Il ne vous reste plus qu'à vérifier (par l'absurde) que λ ne peut pas être nul. Ensuite, la résolution de l'équation différentielle ordinaire qui en découle, en tenant compte des conditions aux limites, vous conduira naturellement aux solutions particulières énoncées dans l'exercice.

2. Ecrire $(-u'', v)_{\mathrm{L}^2(a,b)} = \int_a^b -u''(x)\,v(x)\,dx$, puis faire deux intégrations par parties pour vérifier l'égalité. Les fonctions propres ϕ_k vérifiant $-\phi_k'' = \lambda_k\phi_k$, l'égalité précédente appliquée à deux fonctions propres associées à deux valeurs propres différentes doit vous permettre de conclure.

3. Le fait de disposer d'une famille orthogonale permet d'exprimer très facilement la projection orthogonale de f sur le sous-espace *Vect* $\{\phi_1, \ldots, \phi_N\}$, car la matrice du système de Gram associé est diagonale.

4. Le gros intérêt d'une famille de fonctions propres c'est que l'espace *Vect* $\{\phi_1, \ldots, \phi_N\}$ est invariant par application de l'opérateur différentiel considéré. Développez $-u''$ en fonction des ϕ_k et des λ_k, puis exploitez le fait que la famille des fonctions propres étant orthogonale, c'est nécessairement une base du sous-espace *Vect* $\{\phi_1, \ldots, \phi_N\}$, pour en déduire la valeur des scalaires α_k.

5. Si on suppose que la solution u du problème général $(\mathcal{P})$ existe bien, on peut alors vérifier que
$$(u - \tilde{u}, \phi_k)_{\mathrm{L}^2(a,b)} \;=\; 0\;, \quad 1 \leq k \leq N$$
   ce qui caractérise le fait que $\tilde{u}$ est la meilleure aproximation (i.e. projection orthogonale) de la solution sur l'espace *Vect* $\{\phi_1, \ldots, \phi_N\}$. Pour établir cela, il faut partir du fait que $(u - \tilde{u})$ vérifie les conditions aux limites et que $(-u'' + \tilde{u}'' = f - \tilde{f})$, et exploiter la propriété établie à la question 2.

3-3 Devoir à rendre

3-3.1 Exercice 7c

Soit $E = \mathbb{R}^3$. Soit φ le produit scalaire défini par :

$$\varphi((x, y, z); (x', y', z')) = xx' + yy' + zz'$$

1. Soit P le plan d"équation $2x + 3y + z = 0$. Déterminer $P^\perp$ et $(P^\perp)^\perp$.

2. Déterminer le projeté orthogonal du vecteur $(2; 3; -1)$ sur le plan P. Quelle est la distance d de ce vecteur au plan P.

3. Décomposer tout vecteur de $E = \mathbb{R}^3$ comme somme d'un vecteur de P et de $P^\perp$.

4. En déduire une matrice de la symétrie orthogonale par rapport au plan P. Illustrer par un schéma.

3-3.2 Exercice 8c

On mesure l'échauffement d'un liquide visqueux dans lequel tourne une pale à la vitesse angulaire ω. Une série d'expériences conduit à postuler que l'évolution de la température θ est régie par une loi de la forme

$$\theta = A \ln(a + b\omega)$$

où A, a et b sont trois paramètres à estimer du modèle. On effectue m mesures $(\omega_k, \theta_k)_{k=1,\ldots,m}$ de température.

1. On suppose connu le paramètre A. Proposer une méthode d'estimation par moindres carrés linéaires de a et b.

2. Caractériser la solution à l'aide du théorème de projection orthogonale sur une variété linéaire à préciser.

3-3.3 Exercice 9c

Soit $f \in \mathrm{L}^2(0,b)$. On considère le problème différentiel suivant :

$$(\mathcal{P}) \left\{ \begin{array}{lll} \text{trouver} & u \in \mathrm{L}^2(0,b) & t.q. \\ & -a^2 u'' \;=\; f & \text{dans } \mathrm{L}^2(0,b) \;\; (a>0) \\ & u'(0)=0 \quad \text{et} & u'(b) + K u(b) = 0 \;\; (K>0) \end{array} \right.$$

On va chercher à approcher la solution de $(\mathcal{P})$ en la décomposant dans un sous-espace vectoriel particulier.

1- Pour étudier, dans $\mathrm{L}^2(0,b)$, les propriétés de l'opérateur L défini par $L\,v = -a^2 v''$ avec les conditions aux limites ci-dessus, on introduit le domaine $D(L)$:

$$D(L) = \left\{ v \in \mathrm{L}^2(0,b) \text{ t.q. } v' \in \mathrm{L}^2(0,b)\,,\; v'' \in \mathrm{L}^2(0,b)\,,\; \text{avec } v'(0)=0 \text{ et } v'(b) + K v(b) = 0 \right\}.$$

a- Montrer que l'opérateur L de domaine $D(L)$ est auto-adjoint (symétrique) dans $\mathrm{L}^2(0,b)$, c'est à dire que pour deux fonctions u et v de $D(L)$ on a

$$(-a^2 u'', v)_{\mathrm{L}^2(0,b)} \;=\; (u, -a^2 v'')_{\mathrm{L}^2(0,b)}\;.$$

b- Vérifier que l'opérateur L de domaine $D(L)$ est défini positif dans $\mathrm{L}^2(0,b)$, c'est à dire que pour toute fonction u non nulle dans $D(L)$ on a

$$(-a^2 u'', u)_{\mathrm{L}^2(0,b)} \;>\; 0\;.$$

2- Le but de cette deuxième partie est de caractériser les solutions particulières (fonctions propres et valeurs propres) $(\phi, \lambda) \in \mathrm{L}^2(0,b) \times \mathbb{R}$ du problème

$$(\mathcal{P}(\lambda)) \left\{ \begin{array}{lll} \text{trouver} & \phi \in \mathrm{L}^2(0,b) & t.q. \\ & -a^2 \phi'' \;=\; \lambda\phi & \\ & \phi'(0)=0 \quad \text{et} & \phi'(b) + K\phi(b) = 0 \;\; (K>0) \end{array} \right. .$$

a- Vérifier que $(\phi, \lambda) \in L^2(0,b) \times \mathbb{R}$ est solution du problème $(\mathcal{P}(\lambda))$ si et seulement si λ est strictement positive et vérifie

$$\tan\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{a} b\right) = \frac{Ka}{\sqrt{\lambda}} \,,$$

et donner l'expression des fonctions propres ϕ correspondantes.

b- On pose $\omega = \sqrt{\lambda}/a$, et soient $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \ldots$ les racines positives de l'équation $\omega \tan(\omega b) = K$. Sans chercher à les déterminer explicitement, indiquer par un raisonnement graphique les intervalles dans lesquels elles se trouvent, et vérifier qu'elles forment bien une suite dénombrable croissante tendant vers l'infini.

c- Calculer la norme de ces fonctions propres en fonction de K et de la racine ω_k associée. On utilisera la relation

$$\sin 2t = \frac{2\tan t}{1+\tan^2 t}.$$

3- Montrer que les fonctions propres ainsi déterminées forment bien une famille orthogonale dans $L^2(0,b)$.

4- Exprimer la projection orthogonale $\tilde{f}$ de f sur le sous-espace engendré par les N premières fonctions propres déterminées précédemment. On pensera aussi à bien justifier l'existence et l'unicité de $\tilde{f}$.

5- En écrivant formellement $\tilde{u} \in L^2(0,b)$ comme combinaison linéaire de ces N premières solutions particulières

$$\tilde{u} = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \phi_k$$

déterminer les coefficients α_k, $k = 1, \ldots, N$, tels que

$$-a^2 \tilde{u}'' = \tilde{f} \,.$$

6- Montrer que $\tilde{u}$ ainsi déterminée vérifie bien les conditions aux limites du problème $(\mathcal{P})$.

7- En supposant qu'il existe bien une solution $u \in D(L)$ au problème $(\mathcal{P})$, quelle propriété importante (que l'on justifiera explicitement) relie alors u et $\tilde{u}$?