ALGÈBRE LINÉAIRE
Module 2
PAD - Exercices

S. Rigal, D. Ruiz, et J. C. Satgé

January 2, 2009

Table des Matières

Chapitre 2

Formes bilinéaires et quadratiques

2-1 Exercices corrigés

2-1.1 Exercice 4a – Formes bilinéaires et quadratiques

Les questions 1. et 2. sont indépendantes

1. Soient les formes bilinéaires sur $\mathbb{R}^3$ suivantes :

$$f_1(\mathbf{x};\mathbf{y}) = 2x_1y_1 + 2x_2y_2 + 2x_3y_3 - x_1y_2 - x_2y_1 - x_1y_3 - x_3y_1 - x_2y_3 - x_3y_2$$
$$f_2(\mathbf{x};\mathbf{y}) = 2x_1y_1 + 2x_2y_2 + 2x_3y_3 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_1y_3 + x_3y_1 + x_2y_3 + x_3y_2$$
$$f_3(\mathbf{x};\mathbf{y}) = 2x_1y_1 + 2x_2y_2 + 2x_3y_3 + 2x_1y_2 + 2x_1y_3 + 2x_2y_3$$

   (a) Donner l'expression matricielle de ces formes bilinéaires dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

   (b) Donner les formes quadratiques q_1, q_2, q_3 associées aux formes bilinéaire f_1, f_2, f_3.

   (c) Les formes bilinéaires f_1, f_2, f_3 sont-elles définies positives ?

   (d) Les formes bilinéaires f_1, f_2, f_3 définissent-elles un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$?

2. Soit la forme bilinéaire f dans $\mathbb{R}^3$ de matrice associée

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

   (a) La forme bilinéaire f définit-elle un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$?

   (b) En partant des vecteurs de la base canonique $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, et en utilisant le procédé de SCHMIDT, contruire une base $\mathcal{B}_f = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ qui soit f-orthogonale.

Corrigé :

1. (a), (b) et (c) Expression matricielle des formes bilinéaires f_1, f_2, f_3, dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} f_1(\mathbf{x},\mathbf{y}) &= 2x_1y_1 + 2x_2y_2 + 2x_3y_3 - x_1y_2 - x_2y_1 - x_1y_3 - x_3y_1 - x_2y_3 - x_3y_2 \\ &= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$f_2(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 2x_1y_1 + 2x_2y_2 + 2x_3y_3 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_1y_3 + x_3y_1 + x_2y_3 + x_3y_2$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\
f_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 2x_1y_1 + 2x_2y_2 + 2x_3y_3 + 2x_1y_2 + 2x_1y_3 + 2x_2y_3 \\
&= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

(b) On trouve immédiatement :

$$q_1(\mathbf{x}) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$$

$$q_2(\mathbf{x}) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$$

$$q_3(\mathbf{x}) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$$

(c) Il faut vérifier que : pour tout $\mathbf{x}$, on a $q(\mathbf{x}) \geq 0$ et $q(\mathbf{x}) = 0 \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$.

- On a :

$$q_1(\mathbf{x}) = 2\left(x_1 - \frac{x_2}{2} - \frac{x_3}{2}\right)^2 + \frac{3}{2}(x_2 - x_3)^2$$

On remarque que si $\mathbf{x} = (1, 1, 1)$ alors $q_1(\mathbf{x}) = 0$ ainsi q_1 n'est pas définie positive et f_1 n'est pas un produit scalaire.

- Faisons de même pour q_2 :

$$q_2(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + (x_2 + x_1 + x_3)^2$$

qui est bien positive.

Supposons : $q_2(\mathbf{x}) = 0$ on a :

$$\begin{cases} x_1^2 = 0 \\ x_2^2 = 0 \\ x_3^2 = 0 \\ (x_2 + x_1 + x_3)^2 = 0 \end{cases}$$

car c'est une somme de réels positifs donc $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ et f_2 est définie positive ; il en est de même pour f_2 puisque $q_2 = q_3$

(d) on peut remarquer que f_3 n'est pas symétrique.

Finalement, parmi les applications f_1, f_2, f_3 toutes bilinéaires, seule f_2 définit un produit scalaire.

2. (a) La matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ est symétrique donc f est une forme bilinéaire symétrique. On a :

$$f(\mathbf{x};\mathbf{y}) = 2x_1y_1 + 2x_2y_2 + 2x_3y_3 - x_1y_2 - x_2y_1 - x_2y_3 - x_3y_2$$

et

$$q(\mathbf{x}) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3$$

Il faut vérifier que : pour tout $\mathbf{x}$, on a $q(\mathbf{x}) \geq 0$ et $q(\mathbf{x}) = 0 \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$.Or

$$q(\mathbf{x}) = 2x_1^2 + 2(x_2^2 - x_1x_2 - x_2x_3) + 2x_3^2 = 2(x_2 - \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_3)^2 + \frac{3}{2}x_1^2 + \frac{3}{2}x_3^2 - x_1x_3$$

ou encore :

$$q(\mathbf{x}) = 2(x_2 - \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_3)^2 + \frac{3}{2}(x_1^2 - \frac{2}{3}x_1x_3) + \frac{3}{2}x_3^2$$

Finalement :

$$q(\mathbf{x}) = 2(x_2 - \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_3)^2 + \frac{3}{2}(x_1 - \frac{1}{3}x_3)^2 + \frac{4}{3}x_3^2$$

Donc pour tout $\mathbf{x}$, on a $q(\mathbf{x}) \geq 0$.

De plus

$$q(x) = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} (x_2 - \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_3)^2 = 0 \\ \frac{3}{2}(x_1 - \frac{1}{3}x_3)^2 = 0 \\ \frac{4}{3}x_3^2 = 0 \end{array} \right.$$

Ce qui est équivalent à :

$$\left\{ \begin{array}{c} (x_2 - \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_3) = 0 \\ \frac{3}{2}(x_1 - \frac{1}{3}x_3) = 0 \\ x_3 = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_2 = 0 \\ x_1 = 0 \\ x_3 = 0 \end{array} \right.$$

f est une forme bilinéaire symétrique, définie positive, donc f définit bien un produit scalaire.

(b) Nous pouvons ainsi, en partant des vecteurs de la base canonique $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, et en utilisant le procédé de SCHMIDT, contruire une base $\mathcal{B}_f = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ qui soit f-orthogonale.

- 1ère étape : posons $\mathbf{u}_1 = \mathbf{e}_1$ et cherchons le réel a pour que $\mathbf{u}_2 = a\mathbf{u}_1 + \mathbf{e}_2$ soit f-orthogonal à $\mathbf{u}_1$.On doit avoir :

$$f(a\mathbf{u}_1 + \mathbf{e}_2; \mathbf{u}_1) = 0 \text{ soit : } a = -\frac{f(\mathbf{e}_2; \mathbf{u}_1)}{q(\mathbf{u}_1)}$$

avec

$$f\left(\mathbf{e}_2;\mathbf{u}_1\right) = (1;0;0)\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -1$$

et

$$q\left(\mathbf{u}_1\right) = f\left(\mathbf{u}_1;\mathbf{u}_1\right) = (1;0;0)\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2$$

On obtient $a = \frac{1}{2}$ et donc : $\mathbf{u}_2 = a\mathbf{u}_1 + \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

- 2ème étape : cherchons les réels a et b pour que $\mathbf{u}_3 = a\mathbf{u}_1 + b\mathbf{u}_2 + \mathbf{e}_3$ soit f-orthogonal à $\mathbf{u}_1$ et à.$\mathbf{u}_2$ on doit avoir :

$$f(a\mathbf{u}_1 + b\mathbf{u}_2 + \mathbf{e}_3;\mathbf{u}_1) = 0 \text{ soit : } a = -\frac{f\left(\mathbf{e}_3;\mathbf{u}_1\right)}{q\left(\mathbf{u}_1\right)}$$

avec :

$$f\left(\mathbf{e}_3;\mathbf{u}_1\right) = (1;0;0)\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

donc : $a = 0$

De plus, on doit avoir :

$$f(a\mathbf{u}_1 + b\mathbf{u}_2 + \mathbf{e}_3;\mathbf{u}_2) = 0 \text{ soit : } b = -\frac{f\left(\mathbf{e}_3;\mathbf{u}_2\right)}{q\left(\mathbf{u}_2\right)}$$

avec :

$$f\left(\mathbf{e}_3;\mathbf{u}_2\right) = (0;0;1)\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -1$$

et

$$q\left(\mathbf{u}_2\right) = f\left(\mathbf{u}_2;\mathbf{u}_2\right) = (1/2;1;0)\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 3/2$$

On obtient $b = 2/3$. Ainsi : $\mathbf{u}_3 = a\mathbf{u}_1 + b\mathbf{u}_2 + \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 1 \end{pmatrix}$

La base cherchée est donc :

$$\mathcal{B}_f = \left\{\mathbf{u}_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};\mathbf{u}_2\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};\mathbf{u}_3\begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

2-1.2 Exercice 5a – Réduction en somme de carrés

Soit la forme quadratique q définie sur $E = \mathbb{R}^3$ par :

$$q(x, y, z) = -x^2 + 2xy + 4xz - y^2 + z^2$$

1. Décomposer q en somme algébrique de carrés en utilisant la méthode de Gauss.
2. Déduire de la question précédente, une base dans laquelle l'expression de q est de la forme :
$$q(X, Y, Z) = aX^2 + bY^2 + cZ^2$$
Quelle est la particularité de cette base ?
Est-elle orthogonale ou orthonormale ?

Corrigé :

1. Cette décomposition n'est pas unique , voici une possibilité :
$$q(x, y, z) = -x^2 + 2xy + 4xz - y^2 + z^2 = (z + 2x)^2 - 5\left(x^2 - \frac{2}{5}xy + \frac{y^2}{5}\right)$$
donc
$$q(x, y, z) = (z + 2x)^2 - 5\left(\left(x - \frac{1}{5}y\right)^2 + \frac{4}{25}y^2\right)$$
Finalement
$$q(x, y, z) = (z + 2x)^2 - 5\left(x - \frac{1}{5}y\right)^2 - \frac{4}{5}y^2$$
2. L'expression cherchée dans ce cas est :
$$q(X, Y, Z) = X^2 - 5Y^2 - \frac{4}{5}Z^2$$
avec
$$X = z + 2x$$
$$Y = x - \frac{1}{5}y$$
$$Z = y$$
Pour trouver la base $\mathcal{B}'$ dans laquelle l'expression de q est de cette forme, il faut exprimer (x, y, z) en fonction de (X, Y, Z).
Ainsi, si $\mathbf{P}$ est la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}'$, on a :
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{P} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

Or, on a :

$$X = z + 2x \quad , \quad Y = x - \frac{1}{5}y \quad \text{et} \quad Z = y$$

Soit :

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Donc

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -\frac{2}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

La matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}'$ est donc :

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

La base $\mathcal{B}'$ est donc :

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ 1 \\ -\frac{2}{5} \end{pmatrix} \right\}$$

Cette base n'est pas orthogonale.

On peut écrire :

$$q(x, y, z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}^T \mathbf{A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Avec

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si nous remplaçons, il vient :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}^T \mathbf{A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \left(\mathbf{P} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \right)^T \mathbf{AP} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}^T \mathbf{P}^T \mathbf{AP} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

Ainsi nous pouvons écrire :

$$q(X, Y, Z) = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}^T \mathbf{A}' \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

Avec

$$\mathbf{A}' = \mathbf{P}^T \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

2-1.3 Exercice 6a – Forme quadratique

Soit q la forme quadratique de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ de matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ dans la base canonique $\{i, j, k\}$

1. Donner l'expression analytique de q dans la base $\{i, j, k\}$ et expliciter sa forme polaire.
2. Vérifier que la famille $\{i', j', k'\}$ définie par $i' = i$, $j' = i - j$ et $k' = -j + k$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et donner la matrice de q dans cette base.
3. Expliciter q dans cette base.

Corrigé :

1. On obtient :
$$q((x, y, z)) = x^2 + y^2 + 2z^2 + 4xy + 2yz$$
et
$$f((x, y, z), (x', y', z')) = xx' + yy' + 2zz' + 2xy' + 2x'y + yz' + y'z$$

2. Soient $i' = i$, $j' = i - j$, $k' = -j + k$.
Le déterminant des coordonnées des vecteurs i', j', k' est non nul et vaut -1. La famille $\{i', j', k'\}$ est donc une famille libre.
$\mathbb{R}^3$ étant de dimension 3, on en déduit que $\{i', j', k'\}$ est une base.

Matrice de q dans cette base :
Soit $\mathbf{P}$ la matrice de passage de la base canonique $\{i, j, k\}$ à la base $\{i', j', k'\}$:
$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
On sait que
$$q(\mathbf{X}) = \mathbf{X}^T \mathbf{A} \mathbf{X}$$
On appelle $\mathbf{X} = \mathbf{X}_{base(i,j,k)} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\mathbf{X}' = \mathbf{X}_{base(i',j',k')} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$

On a :
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$
soit $\mathbf{X} = \mathbf{P}\mathbf{X}'$, en reportant dans l'expression de q :
$$q(\mathbf{X}) = \mathbf{X}^T \mathbf{A} \mathbf{X} = (\mathbf{P}\mathbf{X}')^T \mathbf{A} \mathbf{P} \mathbf{X}' = \mathbf{X}'^T \mathbf{P}^T \mathbf{A} \mathbf{P} \mathbf{X}'$$

Ainsi la nouvelle matrice $\mathbf{A}'$ de q dans la nouvelle base est :

$$\mathbf{A}' = \mathbf{P}^T\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

3. L'expression de q dans cette base est donc :

$$q((x, y, z)) = x^2 - 2y^2 + z^2 - 2xy - 4yz - 4xz$$

2-2 Exercices avec indications seulement

2-2.1 Exercice 4b – Forme quadratique

Soit la forme quadratique q définie sur $E = \mathbb{R}^3$ par :

$$q(x, y, z) = x^2 + 3xy - y^2 + 2z^2$$

1. Donner deux formes bilinéaires, l'une symétrique $B_1((x, y, z), (x', y', z'))$, l'autre non symétrique $B_2((x, y, z), (x', y', z'))$ telles que :

   $$B_1((x, y, z), (x, y, z)) = q(x, y, z)$$

   et

   $$B_2((x, y, z), (x, y, z)) = q(x, y, z)$$

   Vérifier que B_1 est unique.

2. Ecrire la matrice $\mathbf{A}$ de la forme bilinéaire B_1.

3. Diagonaliser cette matrice.

Indications :

1. et 2. On pose :

   $$B_1((x, y, z), (x', y', z')) = axx' + byy' + czz' + dxy' + dx'y + exz' + ex'z + fyz' + fy'z$$

   et on identifie. Les réels a, b, c, d, e, f sont uniques. La matrice A est obtenue sans difficulté.
   On opère de même pour B_2, mais en supposant que B_2 n'est pas symétrique, dans ce cas il n'y a pas de solution unique.

3. Cette matrice étant symétrique réelle, elle est diagonalisable dans une base orhonormée de vecteurs propres.
   Appliquer les méthodes du cours précédent.

2-2.2 Exercice 5b – Forme quadratique

Soit q la forme quadratique défini de $E = \mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$q((x, y, z)) = x^2 + 2xy - 2ayz + (1 + a)y^2 + (1 + a + a^2)z^2$$

1. Montrer que q est une forme quadratique.

2. Déterminer sa matrice dans la base canonique de E est elle diagonalisable ?
3. Pour quelles valeurs de a, q définit-elle un produit scalaire?

Indications :

1. Vérifier que la forme polaire de q possède les propriétés nécessaires pour être une forme bilinéaire symétrique .
2. La matrice de q est symétrique réelle, elle est donc diagonalisable.
3. Ecrire $q((x, y, z))$ comme somme de carrés : $q((x, y, z)) = (x + y)^2 + a(y - z)^2 + (1 + a^2)(z)^2$
   Il faut et il suffit que q soit définie positive.

2-2.3 Exercice 6b – Diagonalisation des endomorphismes symétriques

Diagonaliser si possible les matrices suivantes :
$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$; $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix}$; $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
Quelles remarques pouvez vous faire?

Indications :

Tout matrice symétrique réelle est diagonalisable dans une base orhonormée de vecteurs propres. Si ce n'est pas le cas, il faut revenir aux théorèmes vus dans le cours précédent.

2-3 Devoir à rendre

2-3.1 Exercice 4c – Forme bilinéaire

Soit la forme bilinéaire f dans $\mathbb{R}^3$ de matrice associée

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. La forme bilinéaire f définit-elle un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$?

2. En partant des vecteurs de la base canonique $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, et en utilisant le procédé de SCHMIDT, contruire une base $\mathcal{B}_f = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ qui soit f-orthogonale.

3. Considérons maintenant le système linéaire

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \text{ avec } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix}$$

En exprimant la solution $\mathbf{x}$ dans la base $\mathcal{B}_f$:

$$\mathbf{x} = a_1\mathbf{u}_1 + a_2\mathbf{u}_2 + a_3\mathbf{u}_3$$

calculez la valeur des coefficients a_1, a_2, a_3 et donnez la solution $\mathbf{x}$ de ce système.

2-3.2 Exercice 5c – Forme quadratique

Soit la forme quadratique q définie sur $E = \mathbb{R}^3$ par :

$$q(x, y, z) = x^2 + 2xy + 2\sqrt{2}xz + 2y^2 + z^2$$

1. Décomposer q en somme algébrique de carrés en utilisant la méthode de Gauss.

2. Diagonaliser la matrice $\mathbf{A}$ de q (On vérifiera que 3 est valeur propre).
En déduire une autre écriture de $q(x, y, z)$ comme somme de carrés. Cette écriture est-elle unique ?

3. En déduire une base dans laquelle l'expression de q est de la forme :

$$q(X, Y, Z) = aX^2 + bY^2 + cZ^2$$

2-3.3 Exercice 6c – Diagonalisation des endomorphismes symétriques

Déterminer une matrice orthonormale $\mathbf{U}$ qui diagonalise la matrice symétrique réelle

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

On indiquera, avec précision, la matrice de passage et son inverse, sous la forme

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{U}\mathbf{P}^{-1}$$