Chapitre 2

Formes bilinéaires et quadratiques

CORRIGÉS DES EXERCICES

2-2 Correction des exercices de la série 2-2

2-2.1 Exercice 4b - Forme quadratique

1. Pour B_1, on cherche a, b, c, d, e et f réels tels que :

   $B_1((x,y,z),(x',y',z')) = axx' + byy' + czz' + dxy' + dx'y + exz' + ex'z + fyz' + fy'z$

   On doit avoir :
   $$B_1((x,y,z),(x,y,z)) = x^2 + 3xy - y^2 + 2z^2$$
   avec
   $$B_1((x,y,z),(x,y,z)) = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz$$
   En identifiant il vient de façon unique :
   $$a = 1\,, b = -1\,, c = 2\,, d = \frac{3}{2}\,, e = 0\,, f = 0$$

   De même, pour B_2, on cherche a, b, c, d, e, f, d', e' et f' réels tels que :

   $B_2((x,y,z),(x',y',z')) = axx' + byy' + czz' + dxy' + d'x'y + exz' + e'x'z + fyz' + f'y'z$

   On doit avoir :
   $$B_2((x,y,z),(x,y,z)) = x^2 + 3xy - y^2 + 2z^2$$
   avec
   $$B_2((x,y,z),(x,y,z)) = ax^2 + by^2 + cz^2 + (d+d')xy + (e'+e)xz + (f'+f)yz$$
   En identifiant on peut choisir pour qu'elle ne soit pas symétrique :
   $$a = 1\,, = -1\,, c = 2\,d = 3\,, d' = 0\,, e = 0\,, e' = 0\,, f = 5\,, f' = -5$$

2. La matrice $\mathbf{A}$ de la forme bilinéaire B_1 est :
   $$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 0 \\ \frac{3}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

3. Cette matrice étant symétrique réelle, elle est diagonalisable dans une base orhonormée de vecteurs propres.
   Appliquons les méthodes du cours précédent .
   $$det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & \frac{3}{2} & 0 \\ \frac{3}{2} & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(\lambda^2 - \frac{13}{4})$$

Une forme diagonalisée de $\mathbf{A}$ est donc :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{13}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{13}}{2} \end{pmatrix}$$

2-2.2 Exercice 5b - Forme quadratique

Soit q la forme quadratique défini sur $E = \mathbb{R}^3$ par :

$$q((x,y,z)) = x^2 + 2xy - 2ayz + (1+a)y^2 + (1+a+a^2)z^2$$

1. La forme polaire de q est :

   $f((x,y,z),(x',y',z')) = xx' + xy' + x'y - a(yz' + y'z) + (1+a)yy' + (1+a+a^2)zz'$

   qui vérifie bien les propriétés nécessaires pour être une forme bilinéaire symétrique. On en déduit que q est bien une forme quadratique.

2. La matrice de q dans la base canonique de E est :

   $$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1+a & -a \\ 0 & -a & 1+a+a^2 \end{pmatrix}$$

   Etant symétrique réelle, elle est diagonalisable.

3. On obtient aisément :

   $$q((x,y,z)) = (x+y)^2 + a(y-z)^2 + (1+a^2)z^2$$

4. Pour que q définisse un produit scalaire, il faut et il suffit que q soit définie positive. Ce qui nécéssite : $a > 0$.
   Sinon :

   - pour $a = 0$, on obtient par exemple

     $$q((1,-1,0)) = (1-1)^2 + (1+a^2)(0)^2 = 0$$

     ce qui prouve que q n'est pas définie positive.
   - Pour chaque $a < 0$, on peut trouver x et y tels que

     $$q((x,y,0)) = (x+y)^2 + ay^2 < 0$$

     Il suffit de choisir x et y tels que : $|\frac{x+y}{y}| < |a|$
     Par exemple : pour $x = \sqrt{|\frac{a}{2}|} - 1$, $y = 1$, $z = 0$ on obtient

     $$q((x,y,z)) = \left|\frac{a}{2}\right| + a = -\left|\frac{a}{2}\right| < 0$$

2-2.3 Exercice 6b – Diagonalisation des endomorphismes symétriques

1. Matrice **A** : Cette matrice étant non symétrique mais réelle, on ne peut pas affirmer qu'elle est diagonalisable.
   Son polynôme caractéristique est : $-(\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda-4)$, il admet une trois racines distinctes, nous sommes en dimension 3, donc **A** est diagonalisable.
   Une forme diagonalisée de **A** est donc :
   $$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

2. Matrice **B** : Cette matrice étant symétrique mais non réelle, on ne peut pas affirmer qu'elle est diagonalisable.
   Son polynôme caractéristique est : λ^2, il admet une racine double 0.
   Si **B** était diagonalisable, ce serait la matrice nulle ! Ce qui n'est pas le cas donc **B** n'est pas diagonalisable.

3. Matrice **C** : Cette matrice étant symétrique réelle, elle est diagonalisable dans une base orhonormée de vecteurs propres.
   Une forme diagonalisée de **C** est :
   $$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$