ALGÈBRE
PAD - Exercices

S. Rigal, D. Ruiz, et J. C. Satgé

October 30, 2008

Table des Matières

Chapitre 2

Matrices – Changement de base

2-1 Exercices corrigés

2-1.1 Exercice 5a - Calcul matriciel

1. Soient $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$; $\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{A} = \mathbf{D} + \mathbf{N}$.

   Calculer $\mathbf{N}^3$; $\mathbf{DN} - \mathbf{ND}$, $\mathbf{A}^n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

2. Calculer les produits suivants et observer l'action de ces produits sur les vecteurs colonnes de la première matrice.
   $\begin{pmatrix} c & c' & c" \\ d & d' & d" \\ e & e' & e" \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} c & c' & c" \\ d & d' & d" \\ e & e' & e" \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Corrigé :

1. $\mathbf{N}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{A} = \mathbf{D} + \mathbf{N}$.

   On obtient : $\mathbf{N}^3 = \mathbf{0}$ et $\mathbf{DN} = \mathbf{ND}$

   Ainsi $\mathbf{N}$ et $\mathbf{D}$ commutent ; on peut donc appliquer la formule du binôme de NEWTON : $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} k \\ n \end{pmatrix} a^k b^{n-k}$

   On obtient $(\mathbf{D}+\mathbf{N})^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} k \\ n \end{pmatrix} \mathbf{N}^k \mathbf{D}^{n-k}$

   (note $\begin{pmatrix} k \\ n \end{pmatrix}$ s'écrit aussi C_n^k)

   Comme les puissances de $\mathbf{N}$ s'annulent dès que $n \geq 3$, la somme est obtenue en faisant varier k de 0 à 2.

   Donc : *si* $n \geq 2$, $(\mathbf{D}+\mathbf{N})^n = \sum_{k=0}^{2} \begin{pmatrix} k \\ n \end{pmatrix} \mathbf{N}^k \mathbf{D}^{n-k} = \mathbf{D}^n + n\mathbf{N}\mathbf{D}^{n-1} + \begin{pmatrix} 2 \\ n \end{pmatrix} \mathbf{N}^2 \mathbf{D}^{n-2}$

   D'où : *si* $n \geq 2$,

$$\mathbf{A}^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & a^n & 0 \\ 0 & 0 & a^n \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & a^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & a^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$+ \tfrac{n(n-1)}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^{n-2} & 0 & 0 \\ 0 & a^{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & a^{n-2} \end{pmatrix}$$

D'où

$$\mathbf{A}^n = \begin{pmatrix} a^n & \frac{n}{2}(n-1)\,a^{n-2} + na^{n-1} & na^{n-1} \\ 0 & a^n & 0 \\ 0 & na^{n-1} & a^n \end{pmatrix}$$

2. $\begin{pmatrix} c & c' & c" \\ d & d' & d" \\ e & e' & e" \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c + ac' + bc" & c' & c" \\ d + ad' + bd" & d' & d" \\ e + ae' + be" & e' & e" \end{pmatrix}$

et $\begin{pmatrix} c & c' & c" \\ d & d' & d" \\ e & e' & e" \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c' & c & c" \\ d' & d & d" \\ e' & e & e" \end{pmatrix}$

2-1.2 Exercice 6a - Rang d'une matrice

1. Soit la matrice à coefficients réels $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & 0 & -1 & b \\ 3 & 2 & 1 & c \\ 5 & 4 & -1 & -4 \end{pmatrix}$

   Expliquez sans calculs pourquoi le rang de $\mathbf{A}$ est supérieur ou égal à 2 et inférieur ou égal à 3.

   Comment choisir a, b et c pour que le rang soit 2 ?

2. Trouver une base de $E = Vect \left\{ \mathbf{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{v} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{w} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Corrigé :

1. On sait que $\mathbf{A}$ et $\mathbf{A}^T$ ont le même rang.

   $\mathbf{A}$ ayant 4 colonnes, $rang\ \mathbf{A} \leq 4$;

   $\mathbf{A}^T$ ayant 3 colonnes, $rang\ \mathbf{A}^T \leq 3$

   De plus les deux vecteurs colonnes du milieu $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires donc $rang\ \mathbf{A} \geq 2$.

   Il faut choisir a, b, c pour que le rang soit égal à 2 donc que les vecteurs colonnes 1 et 4 soient combinaisons linéaires des vecteurs colonnes 2 et 3.

   Ce qui revient à dire que les déterminants $\begin{vmatrix} a & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & -1 \end{vmatrix}$ et $\begin{vmatrix} 0 & -1 & b \\ 2 & 1 & c \\ 4 & -1 & -4 \end{vmatrix}$ sont nuls.

   Ce qui s'écrit $\left\{ \begin{array}{c} -6a - 2 = 0 \\ -6b - 4c - 8 = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} a = -1/3 \\ c = -\frac{3}{2}b - 2 \end{array} \right.$

   On vérifie que ces conditions nécessaires sont suffisantes.

2. Les deux premiers vecteurs ne sont pas colinéaires car leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles. On peut le voir en remarquant que le déterminant extrait de leurs coordonnées est non nul. $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \neq 0$

Pour savoir si le troisième vecteur $\mathbf{w}$ est combinaison linéaire des deux premiers, on peut chercher s'il existe deux réels a et b tels que : $\mathbf{w} = a\mathbf{u} + b\mathbf{v}$. On peut aussi voir si la famille $\{\mathbf{u}; \mathbf{v}; \mathbf{w}\}$ est liée, s'il en est ainsi **tous** les déterminants de format 3×3 extraits de $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ sont nuls. Or :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 0 \text{ et } \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \text{ et } \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

La famille est donc liée. Le 3ème vecteur est combinaison linéaire des deux premiers

Appliquons la même méthode pour savoir si $\mathbf{t}$ appartient à $Vect\{\mathbf{u}; \mathbf{v}\}$

Si la famille $\{\mathbf{u}; \mathbf{v}; \mathbf{t}\}$ était liée, tous les déterminants de format 3×3 extraits de $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ seraient nuls.

Or, $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \neq 0$

Donc cette famille est libre et $\{\mathbf{u}; \mathbf{v}; \mathbf{t}\}$ est une base de de l'espace vectoriel E qui est donc de dimension 3.

2-1.3 Exercice 7a - Changement de bases

On appelle a, b et c trois réels et f l'application linéaire de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}_3[X]$ définie par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X]\,; f(P) = (aX+1)P + (bX+c)P'$$

où P' désigne le polynôme dérivé de P.

1. Ecrire la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}_2[X]$ et de $\mathbb{R}_3[X]$.

2. On appelle g l'application linéaire obtenue à partir de f en restreignant l'ensemble d'arrivée à $\mathbb{R}_2[X]$. Comment choisir les réels a, b, c pour que g soit un endomorphisme ? Ecrire alors la matrice G de g dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. A quelles conditions g est-elle surjective? (Pensez au théorème du rang).

3. Si $b = 1$ et $c = 1$, calculer l'inverse de la matrice G. En utilisant la formule de changement de bases, écrire la matrice de g dans la base : $\{X^2; X(X-1); (X-1)^2\}$.

Corrigé : f est l'application de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}_3[X]$ définie par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X]\,; f(P) = (aX+1)\,P + (bX+c)\,P'$$

1. La dimension des espaces de départ et d'arrivée étant respectivement 3 et 4, la matrice de f aura 3 colonnes et 4 lignes.

$$f(1) = aX + 1$$

$$f(X) = c + (b+1)X + aX^2$$

$$f(X^2) = 2cX + (2b+1)X^2 + aX^3$$

La matrice de f est donc :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & c & 0 \\ a & 1+b & 2c \\ 0 & a & 1+2b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

2. Pour définir g il faut que les images des vecteurs de base soient dans $\mathbb{R}_2[X]$, il faut donc que $f(X^2) = 2cX + (2b+1)X^2 + aX^3$ ait un degré inférieur ou égal à 2. Donc $a = 0$ est nécessaire et suffisant.

La matrice de g est donc :

$$G = \begin{pmatrix} 1 & c & 0 \\ 0 & 1+b & 2c \\ 0 & 0 & 1+2b \end{pmatrix}$$

En dimension finie, d'aprés le théorème du rang, g étant un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$, g surjective équivaut à g injective équivaut à g bijective.
Etudier l'injectivité, revient soit à montrer que le déterminant de G est non nul, soit à montrer que le rang de G est 3, soit à vérifier que le noyau de g est réduit au vecteur nul.

On a : $\det G = (1+b)(1+2b)$.
g est surjective équivaut à b est différent de -1 et $-1/2$.

3. On suppose que : $b = 1$ et $c = 1$. La matrice de g est dans ce cas :

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Pour calculer l'inverse plusieurs méthodes sont possibles , $(\det G)G^{-1}$ est la transposée de la matrice des cofacteurs, ainsi :

$$G^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 & -3 & 2 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

En utilisant la formule de changement de bases, écrivons la matrice de g dans la base : $\{X^2; X(X-1); (X-1)^2\}$.

Les colonnes de la matrice de passage P sont les coordonnées des vecteurs de la nouvelle base exprimés dans l'ancienne base.

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi G' la matrice de g dans la base $\{X^2; X(X-1); (X-1)^2\}$ s'écrit : $G' = P^{-1}GP$. Donc, en calculant P^{-1}, on obtient :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi :

$$G' = P^{-1}GP = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

2-2 Exercices avec indications seulement

2-2.1 Exercice 5b - Changement de bases

Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par sa matrice $\mathbf{A}$ dans la base canonique

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

On considère une nouvelle base de $\mathbb{R}^3$: $\left\{ \mathbf{i} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} ; \mathbf{j} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} ; \mathbf{k} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

f étant un endomorphisme, on prend la même base dans l'ensemble de départ et dans l'ensemble d'arrivée. (puisque c'est le même ensemble)

1. Calculer les images par f des vecteurs $\mathbf{i}; \mathbf{j}; \mathbf{k}$. Déterminer directement la matrice $\mathbf{A}'$ de f dans cette nouvelle base. On dit que les matrices A et A' sont équivalentes car elles représentent le même endomorphisme dans des bases différentes.

2. Retrouver le résultat du 1) en utilisant la formule de changement de base vue en cours.

Indications :

1. Calculer les ccordonnées des images des vecteurs $\mathbf{i}; \mathbf{j}; \mathbf{k}$, dans la base $\{\mathbf{i}; \mathbf{j}; \mathbf{k}\}$ .on obtient ainsi les colonnes de la matrice cherchée.

2. Ici, dans la formule du cours, $\mathbf{P} = \mathbf{Q}$ d'où : $\mathbf{A}' = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$

   En remplaçant par les matrices, le calcul donne le résultat suivant :

$$\mathbf{A}' = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -3 & -9 & -4 \\ 5 & -7 & -2 \end{pmatrix}$$

2-2.2 Exercice 6b - Déterminants

1. Calculer les déterminants suivants :

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} \quad D_2 = \begin{vmatrix} p+q & p & p \\ p & p+q & p+q \\ p & p & p \end{vmatrix} \quad D_3 = \begin{vmatrix} a & 2 & 5 \\ 0 & b & 3 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix}$$

2. Ecrire la transposée de la matrice des cofacteurs des matrices suivantes :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & 5 & -3 \\ 4 & 1 & -4 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 7 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Indications :

1. $D_1 = (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)$
   $D_2 = 0$
   $D_3 = abc$
2. $(\mathsf{Com}\,\mathbf{A})^T = \begin{pmatrix} -17 & 12 & -9 \\ -20 & -4 & 3 \\ -22 & 11 & 11 \end{pmatrix}$, $(\mathsf{Com}\,\mathbf{B})^T = \begin{pmatrix} 39 & -35 & 25 & -11 \\ 20 & 28 & -20 & -4 \\ -2 & 10 & 2 & -6 \\ -15 & -21 & 15 & 19 \end{pmatrix}$

2-2.3 Exercice 7b - Changement de bases

Soit E l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 3.

1. Montrer que la famille $\left\{X^3; X^2(X-1); X(X-1)^2; (X-1)^3\right\}$ de vecteurs de E est une base de E notée B_1
2. Ecrire la matrice de passage $\mathbf{A}$ de la base canonique $B_0 = \{1; X; X^2; X^3\}$ à la base B_1.
3. Ecrire la matrice de passage $\mathbf{C}$ de la base B_1 à la base canonique $B_0 = \{1; X; X^2; X^3\}$. Que dire du produit $\mathbf{AC}$? Du produit $\mathbf{CA}$?
4. Soit f l'application de E dans E définie par : $\forall P \in E; f(P) = XP'$.
   Déterminer la matrice $\mathbf{M}$ de f dans la base B_0, puis sa matrice $\mathbf{M}'$ dans la base B_1.

Indications :

1. On peut utiliser le déterminant, exprimé dans la base canonique, du système de vecteurs $\left\{X^3; X^2(X-1); X(X-1)^2; (X-1)^3\right\}$
2. La matrice de passage $\mathbf{A}$ de la base canonique B_0 à la base B_1 est la matrice de l'application identique de $\mathbb{R}^3$ muni de la base B_1, dans $\mathbb{R}^3$ muni de la base B_0. Il suffit d'écrire les vecteurs de B_1 dans la base B_0.
3. On peut écrire les vecteurs de B_0 dans la base B_1.
4. Pour déterminer $\mathbf{M}$, il suffit d'exprimer les images des vecteurs de B_0 dans la base B_0. Pour déterminer $\mathbf{M}'$ on peut exprimer les images des vecteurs de B_1 dans la base B_1 (on peut aussi utiliser la formule de changement de base : $\mathbf{M}' = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{MA}$).

2-3 Devoir à rendre

2-3.1 Exercice 5c - Calcul matriciel

Soit la matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 9 \\ 1/3 & 0 & 3 \\ 1/9 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$

1. Montrer que $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A} + \mathbf{2I}$, en déduire que $\mathbf{A}$ est inversible et écrire $\mathbf{A}^{-1}$.

2. Montrer que p étant un entier naturel supérieur à 2, si $\mathbf{A}^p = a_p\mathbf{A} + b_p\mathbf{I}$, alors $\mathbf{A}^{p+1} = a_{p+1}\mathbf{A} + b_{p+1}\mathbf{I}$,avec $a_{p+1} = a_p + b_p$ et $b_{p+1} = 2a_p$

   Calculer a_2 et a_3

3. Montrer que : $a_{p+1} - a_p = 2a_{p-1}$ et vérifier que : $a_p = \frac{1}{3}\left[2^p - (-1)^p\right]$. En déduire b_p

2-3.2 Exercice 6c - Inversion de matrice

1. Soient les matrices $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & 5 & -3 \\ 4 & 1 & -4 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

   Montrer que $\det \mathbf{A} \times \det \mathbf{B} = \det \mathbf{AB}$. Ce résultat est vrai dans tous les cas.

2. Soit la matrice : $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1+x & 3 & 0 \\ -2 & 5-x & 7 \\ 4 & -5 & -4+x \end{pmatrix}$

   (a) Trouver x pour que $\mathbf{D}$ ne soit pas inversible (c'est à dire que son rang soit strictement inférieur à 3, ce qui équivaut à $\det \mathbf{D} = 0$).
   Note : on pourra être amené à utiliser une calculatrice

   (b) Pour $x = 2$ calculer $\det \mathbf{D}$; $\mathit{Com}\,\mathbf{D}$(la matrice des cofacteurs) le produit $\mathbf{D} * (\mathit{Com}\,\mathbf{D})^T$. Que remarquez vous ?

INFORMATION : Ceci se généralise et donne une méthode pour calculer l'inverse d'une matrice.

Soit $\mathbf{A}$ une matrice, on calcule $\det \mathbf{A}$, si ce nombre est non nul alors $\mathbf{A}$ est inversible et : $\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} (\mathit{Com}\,\mathbf{A})^T$

2-3.3 Exercice 7c - Changement de bases

Soit E et F deux espaces vectoriels de bases respectives :

$$B = \{a; b; c\} \text{ et } B_1 = \{u; v\}$$

- Montrer que $B' = \{a; a+b; a+c\}$ et $B'_1 = \{u+v; u-v\}$ sont respectivement des bases de E et F.
- Soit f l'application linéaire de E dans F définie par : $f(a) = u+v$; $f(b) = u-v$; $f(c) = u$
  Ecrire la matrice M de f dans les bases respectives de E et F : B et B_1.
- Ecrire la matrice M'de f dans les bases respectives de E et F : B' et B'_1.
- Déterminer deux matrices inversibles P Q telles que : $M = QM'P^{-1}$
  Expliquer ce que représentent P et Q.