Chapitre 1

Espaces vectoriels – Applications linéaires

CORRIGÉS DES EXERCICES

1-2 Correction des exercices de la série 1-2

1-2.1 Exercice 1b - Somme directe - Application linéaire

1. Vérifions que F est un sous espace vectoriel de E :

   - F est non vide, en effet le polynôme défini par $X-1$ est factorisable par $X-1$ et donc appartient à F.
   - P et P_1 étant deux élements quelconques de F et a un réel quelconque, on a : $P=(X-1)Q$ et $P_1=(X-1)Q_1$ où Q et Q_1 sont deux polynômes. Donc
   $$P+aP_1=(X-1)Q+a(X-1)Q_1=(X-1)(Q+aQ_1)$$
   et donc $P+aP_1$ appartient à F.

2. Tout polynôme P de E s'écrit : $P=(X-1)Q+P(1)$. P est donc la somme d'un polynôme de F et d'un polynôme constant donc de $R_0[X]$.
   Ainsi
   $$E=F+R_0[X]$$
   Il reste à vérifier que la somme est directe c'est à dire que seul le polynôme nul est commun à F et à $R_0[X]$. Ce qui est évident (Seul le polynôme constant nul est factorisable par $(X-1)$).
   Ainsi
   $$E=F\oplus R_0[X]$$

3. Montrons d'abord que f est linéaire.
   Soient deux élements quelconques P et P_1 de E et a un réel quelconque.
   $$f(P+aP_1)=((P+aP_1)(1)\,;(P+aP_1)'(1))=(P(1)\,;P'(1))+a\,(P_1(1)\,;P_1'(1))$$
   Finalement :
   $$f(P+aP_1)=f(P)+af(P_1)$$
   Le noyau de f est l'ensemble des polynômes P tels que $(P(1)\,;P'(1))=(0\,;0)$
   Ce sont les polynômes de F dont la dérivée s'annule en 1. C'est à dire factorisables par $(X-1)^2$. En effet, si l'on suppose que $P=(X-1)Q$ on a : $P'=(X-1)Q'+Q$, et Q est donc factorisable par $X-1$, soit $P=(X-1)^2R$
   On sait que la dimension de $\mathbb{R}_n[X]$ est égale à $n+1$.
   Faisons le bilan, suivant les valeurs de n :

   - Si $n>1$, une base de $\mathit{Ker}f$ est $\{(X-1)^2,(X-1)^3,\dots(X-1)^n\}$.
   $\mathit{Ker}f$ est de dimension $n-1$.
   D'après le théorème du rang : $\dim \mathit{Im}f=2$ donc $\mathit{Im}f=\mathbb{R}^2$

On munit $\mathbb{R}_n[X]$ de la base $\{1, (X-1), (X-1)^2, \ldots (X-1)^n\}$ et $\mathbb{R}^2$ de la base canonique. La matrice de f est alors :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Si $n = 1$, $\mathsf{Ker} f = \{0_E\}$. D'après le théorème du rang : $\mathsf{Im} f = \mathbb{R}^2$
  Si l'on munit $\mathbb{R}_1[X]$ de la base $\{1, (X-1)\}$ et $\mathbb{R}^2$ de la base canonique. La matrice de f est alors :
  $$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
- Si $n = 0$, $\mathsf{Ker} f = \{0_E\}$. D'après le théorème du rang : $\mathsf{Im} f = \mathsf{Vect}(1; 0)$.
  Si l'on munit $\mathbb{R}_0[X]$ de la base $\{1\}$ et $\mathbb{R}^2$ de la base canonique. La matrice de f est alors :
  $$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1-2.2 Exercice 2b - Base d'un espace vectoriel

1. On a : $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$. La famille $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ n'est donc pas libre.

2. $F = \mathsf{Vect}\,\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$, or d'après 1) $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$,on peut donc enlever $\mathbf{w}$ de la famille $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ .La famille $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ est donc génératrice de F.

   De plus $\lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{v} = \mathbf{0}$ s'écrit : $(\lambda, -\lambda - \mu, \lambda + 2\mu) = (0, 0, 0)$,

   ou encore $\{\lambda = 0, -\lambda - \mu = 0, \lambda + 2\mu = 0\}$ ce qui est équivalent à $\lambda = \mu = 0$.

   La famille $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ est donc libre

   La famille $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ est donc une base de F.

3. G est un sous ensemble de $\mathbb{R}^3$.

   G est non vide, en effet $(0, 0, 0) \in G$

   Soient λ et μ deux réels, (x, y, z) et (x', y', z') deux éléments de G

   $(x, y, z) \in G$ donc $x + 2y + z = 0$

   $(x', y', z') \in G$ donc $x' + 2y' + z' = 0$

   On calcule $\lambda(x, y, z) + \mu(x', y', z') = (\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y', \lambda z + \mu z')$

   Et $(\lambda x + \mu x') + 2(\lambda y + \mu y') + (\lambda z + \mu z') = \lambda(x + 2y + z) + \mu(x' + 2y' + z') = 0$

   Donc $\lambda(x, y, z) + \mu(x', y', z') \in G$

   G est non vide et stable par combinaison linéaire. G est donc un s.e.v. de $\mathbb{R}^3$.

4. Soit $(x, y, z) \in G$, on a : $x + 2y + z = 0$, ce qui équivaut à $z = -x - 2y$

   On écrit : $(x, y, z) = (x, y, -x - 2y) = x(1, 0, -1) + y(0, 1, -2)$

   Les vecteurs $\mathbf{a} = (1, 0, -1)$ et $\mathbf{b} = (0, 1, -2)$ engendrent donc G

   La famille $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ est libre : on peut le montrer en utilisant la même méthode que pour la question 1), ou alors, plus simplement, dans le cas de deux vecteurs : la famille $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ est libre car les coordonnées du vecteur $\mathbf{a}$ ne sont pas proportionnelles à celles de $\mathbf{b}$.

   La famille $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ est donc une base de G et $\dim G = 2$

5. Soit $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ la base de F définie au 2)

   $\mathbf{u} = (1, -1, 1)$ et $1 + 2 \times (-1) + 1 = 0$ donc $\mathbf{u} \in G$

   $\mathbf{v} = (1, -1, 1)$ et $0 + 2 \times 1 - 2 = 0$ donc $\mathbf{v} \in G$

   Donc toute combinaison linéaire des vecteurs $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ appartient à G, et donc $F \subset G$

   On vérifie de même :

   Soit $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ la base de G définie au 4)

   $\mathbf{a} = (1, 0, -1) = \mathbf{u} - \mathbf{v}$ donc $\mathbf{a} \in F$

   $\mathbf{b} = (0, 1, -2) = -\mathbf{v}$ donc $\mathbf{b} \in F$

   Donc toute combinaison linéaire des vecteurs $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ appartient à F, et donc $G \subset F$

   On a montré $F \subset G$ et $G \subset F$ donc $G = F$

   Note : les espaces F et G étant de dimension 2, il suffit de prouver que $F \subset G$ pour prouver l'égalité.

1-2.3 Exercice 3b - Matrice d'une application linéaire

1. Il faut prouver que quels que soient $\mathbf{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\mathbf{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$, éléments de $\mathbb{R}^3$ et quel que soit le réel μ : $f(\mu\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mu f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v})$.

   $\mu\mathbf{u} + \mathbf{v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} \mu x + x' \\ \mu y + y' \\ \mu z + z' \end{pmatrix}$

- On appelle $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ les coordonnées de $f(\mu\mathbf{u} + \mathbf{v})$ dans la base canonique $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ de $\mathbb{R}^2$.

On a : $\left\{\begin{array}{l} X = \lambda(\mu x + x') + \mu y + y' \\ Y = \mu y + y' + \lambda(\mu z + z') \end{array}\right.$ donc : $\left\{\begin{array}{l} X = \lambda\mu x + \mu y + \lambda x' + y' \\ Y = \mu y + \lambda\mu z + y' + \lambda z' \end{array}\right.$

- On appelle $\begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix}$ les coordonnées de $\mu f(\mathbf{u})+f(\mathbf{v})$ dans la base canonique $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ de $\mathbb{R}^2$.

On a : $\left\{\begin{array}{l} X = \mu(\lambda x + y) + (\lambda x' + y') \\ Y = \mu(y + \lambda z) + (y' + \lambda z') \end{array}\right.$ donc : $\left\{\begin{array}{l} X' = \lambda\mu x + \mu y + \lambda x' + y' \\ Y' = \mu y + \lambda\mu z + y' + \lambda z' \end{array}\right.$

Donc

$$f(\mu\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mu f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v}).$$

f est donc une application linéaire.

2. On exprime $f(\mathbf{e}_1), f(\mathbf{e}_2)$ et $f(\mathbf{e}_3)$ dans base canonique $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$.

   On obtient : $f(\mathbf{e}_1)\begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix}$, $f(\mathbf{e}_2)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $f(\mathbf{e}_3)\begin{pmatrix} 0 \\ \lambda \end{pmatrix}$

   La matrice A de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$ est donc :

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

3.a. L'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ étant de dimension 3, tout système libre de trois vecteurs est une base de $\mathbb{R}^3$. Il faut donc vérifier que $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ est une famille libre.
Supposons : $\alpha\mathbf{u}+\beta\mathbf{v}+\gamma\mathbf{w} = \mathbf{0}$

On obtient le système :

$$\left\{\begin{array}{c} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha + 2\beta + \gamma = 0 \\ -\gamma = 0 \end{array}\right.$$

qui admet comme solution unique : $\alpha = \beta = \gamma = 0$

Donc $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$

3.b. Même raisonnement que pour le 3.a. $\mathbb{R}^2$ est de dimension 2, $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$ si et seulement si c'est une famille libre. Il suffit de vérifier, dans ce cas, que les coordonnées de $\mathbf{i}$ et $\mathbf{j}$ ne sont pas proportionnelles.

3.c. Il faut calculer les coordonnées de $f(\mathbf{u}), f(\mathbf{v}), f(\mathbf{w})$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ puis dans la base $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$.

Dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$,

$f(\mathbf{u}) = f(\mathbf{e}_1) + f(\mathbf{e}_2)$ donc $f(\mathbf{u})$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} \lambda + 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$f(\mathbf{v}) = f(\mathbf{e}_1) + 2f(\mathbf{e}_2)$ donc $f(\mathbf{v})$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} \lambda + 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$f(\mathbf{w}) = f(\mathbf{e}_2) - f(\mathbf{e}_3)$ donc $f(\mathbf{w})$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 - \lambda \end{pmatrix}$

Autrement dit

$$\left\{\begin{array}{c} f(\mathbf{u}) = (\lambda+1)\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \\ f(\mathbf{v}) = (\lambda+2)\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 \\ f(\mathbf{u}) = \varepsilon_1 + (1-\lambda)\varepsilon_2 \end{array}\right.$$

On exprime ensuite ces vecteurs dans la base $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$. Pour cela on résoud le système :

$$\left\{\begin{array}{c} \mathbf{i} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \\ \mathbf{j} = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \end{array}\right.$$

On obtient :

$$\left\{\begin{array}{c} \varepsilon_1 = \frac{1}{2}(\mathbf{i}+\mathbf{j}) \\ \varepsilon_2 = \frac{1}{2}(\mathbf{i}-\mathbf{j}) \end{array}\right.$$

On remplace ε_1 et ε_2 par ces valeurs dans les expressions de $f(\mathbf{u}), f(\mathbf{v}), f(\mathbf{w})$.On obtient finalement :

$$\left\{\begin{array}{c} f(\mathbf{u}) = (1+\frac{\lambda}{2})\mathbf{i} + \frac{\lambda}{2}\mathbf{j} \\ f(\mathbf{v}) = (2+\frac{\lambda}{2})\mathbf{i} + \frac{\lambda}{2}\mathbf{j} \\ f(\mathbf{u}) = (1-\frac{\lambda}{2})\mathbf{i} + \frac{\lambda}{2}\mathbf{j} \end{array}\right.$$

La matrice de f dans les bases T, U. est donc :

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 1+\frac{\lambda}{2} & 2+\frac{\lambda}{2} & 1-\frac{\lambda}{2} \\ \frac{\lambda}{2} & \frac{\lambda}{2} & \frac{\lambda}{2} \end{pmatrix}$$

1-2.4 Exercice 4b - Image et noyau d'une application

Par définition de la matrice de f :

$$f(\mathbf{e}_1)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \;;\; f(\mathbf{e}_2)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \;;\; f(\mathbf{e}_3)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Pour tout vecteur $\mathbf{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$; $f(\mathbf{u})$ a pour coordonnées : $\begin{pmatrix} x+y+z \\ 2x+z \\ x+3y+2z \end{pmatrix}$

- $\mathbf{u} \in \mathit{Ker}\, f \Leftrightarrow f(\mathbf{u}) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x+y+z=0 \\ 2x+z=0 \\ x+3y+2z=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x=x \\ y=x \\ z=-2x \end{array}\right.$

donc $\mathit{Ker}\, f = \mathit{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right\}$

- $\mathit{Im}\, f = \mathit{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

  Or la famille $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ est liée

donc $\mathit{Im}\, f = \mathit{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$

Appelons $\widetilde{\mathbf{e}}_1, \widetilde{\mathbf{e}}_2, \widetilde{\mathbf{e}}_3$ respectivement les vecteurs : $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$f(\widetilde{\mathbf{e}}_1)$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$ dans la base canonique,

$$\text{et } \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ avec } a = \frac{3}{2}; b = \frac{5}{2}; c = 0$$

$f(\widetilde{\mathbf{e}}_2)$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$ dans la base canonique,

$$\text{et } \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ avec } a = \frac{5}{2}; b = \frac{3}{2}; c = 0$$

$f(\widetilde{\mathbf{e}}_3)$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ dans la base canonique, et $f(\widetilde{\mathbf{e}}_3) = 0.\widetilde{\mathbf{e}}_1 + 0.\widetilde{\mathbf{e}}_2 + 0.\widetilde{\mathbf{e}}_3$

Dans la base $\{\widetilde{\mathbf{e}}_1, \widetilde{\mathbf{e}}_2, \widetilde{\mathbf{e}}_3\}$ la matrice de f est :

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{5}{2} & 0 \\ \frac{5}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$