Exercices FPV - Semaine 4

Joseph Noailles, Frédéric Messine

Ces exercices sont rattachés au cours sur les fonctions implicites.

1 Exercices avec Corrigés

1.1 Exercice FPVINP-12

On considère l'équation $x^1 + y^2 - 1 = 0, x \in I\!R, y \in I\!R$, quels sont les points $(a, b) \in I\!R^2$ au voisinage desquels le théorème des fonctions implicites permet de définir une fonction $x \to g(x)$.

1.2 Correction de l'exercice FPVINP-12

Soit $f : (x, y) \to x^2 + y^2 - 1$, posons $\Omega = I\!R^2$, la fonction f est de façon évidente de classe C^1 sur Ω, les applications $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ étant continues sur Ω :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x, \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y.,$$

Soit $(a, b) \in \Omega : f(a, b) = 0\ Leftrightarrow\ a = \pm\sqrt{1 - b^2}$ et $-1 \leq b \leq 1$ on a :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 2b$$

<u>1er cas :</u> $0 < b \leq 1, a = \pm\sqrt{1 - b^2}$ alors

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 2b \neq 0,$$

le **théorème des fonctions implicites** s'applique ; les ouverts V et U suivants répondent à la question : $V =] - \sqrt{1 - \delta^2}, +\sqrt{1 - \delta^2}[\times]\delta, \gamma[$ avec $0 < \delta < b, \gamma > 1$ et $U =] - \sqrt{1 - \delta^2}, +\sqrt{1 - \delta^2}[$.
On peut dans ce cas expliciter g sur U : $g : x \to \sqrt{1 - x^2}$.
On vérifie l'éqution (1) du cours :

$$g'(a) = -\left[\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)\right]^{-1} . \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$$

en effet : $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 2b$ et donc, $\left[\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right]^{-1} = \dfrac{1}{2b}$, avec $b \neq 0$ et $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b) = 2a$ d'où

$$g'(a) = -\frac{2a}{2b} = -\frac{a}{b} = -\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}$$

qui est bien ce que l'on retrouve en calculant directement la dérivée au point a de la fonction $x \to \sqrt{1-x^2}$ puisque $b \neq 0 \Rightarrow |a| \neq 1$ et donc, la fonction est dérivable au point a.

2ème cas : $b = 0$, et $|a| = 1$
Alors $f(a,b) = 0$ mais

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0,$$

On vérifie effectivement que le théorème ne s'applique plus, tout pavé ouvert contenant $(1,0)$ de la forme $]\alpha,\beta[\times]\delta,\gamma[$ avec $\alpha < 1$, $\beta > 1$, $\delta < 0$ et $\gamma > 0$
. Pour tout x tq $\alpha < x < 1$, il existe 2 valeurs de y tq $f(x,y) = 0$.
. Pour tout x tq $1 < x < \beta$, il n'y a aucune valeur de y telle que $f(x,y) = 0$.

3ème cas : $b > 0$, et $a = \pm\sqrt{1-b^2}$ la situation est identique, à celle du premier cas, à la différence près que dans ce cas g est la fonction définie sur U par $x \to -\sqrt{1-x^2}$.

1.3 Exercice FPVINP-13

On considère les deux équations suivantes aux 5 variables réelles x_1, x_2, x_3, y_1, y_2 :

$$\begin{cases} 2e^{y_1} + x_1 y_2 - 4x_2 + 3 = 0 \\ y_2 \cos y_1 - 6y_1 + 2x_1 - x_3 = 0 \end{cases}$$

1. Montrer qu'au voisinage du point (a,b), $a = (3,2,7)$ et $b = (0,1)$, on peut définir une fonction g

   $$g : (x_1,x_2,x_3) \to g(x_1,x_2,x_3) = (g_1(x_1,x_2,x_3), g_2(x_1,x_2,x_3))$$

   de classe C^1.
2. Calculer les dérivées partielles $\dfrac{\partial g_i}{\partial x_j}(a,b)$pour $i = 1,2$ et $j = 1,2,3$.

1.4 Correction de l'exercice FPVINP-13

1. Posons $x = (x_1,x_2,x_3), y = (y_1,y_2)$, $f_1(x,y) = 2e^{y_1}x_1y_2 - 4x_2 + 3$, $f_2(x,y) = y_2\cos y_1 - 6y_1 + 2x_1 - x_3$, $f(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y))$, $\Omega = I\!R^5$.
Alors
. f est de classe C^1 sur Ω, car f_1 et f_2 le sont comme somme de fonctions de classe C^1.
. $f(a,b) = 0$ car $f_i(a,b) = 0, i = 1,2$.
.

$$D_y f(a,b) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(a,b) & \frac{\partial f_1}{\partial y_2}(a,b) \\ \frac{\partial f_2}{\partial y_1}(a,b) & \frac{\partial f_2}{\partial y_2}(a,b) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -6 & 1 \end{bmatrix}$$

est une matrice inversible, ses deux vecteurs colonnes étant linéairement indépendants.

On peut donc appliquer le théorème des fonctions implicites :
Il existe une fonction g définie sur un ouvert U contenant a, de classe C^1 sur U :

$$(x_1, x_2, x_3) \to g(x_1, x_2, x_3) = (g_1(x_1, x_2, x_3), g_2(x_1, x_2, x_3))$$

2. On a :

$$Dg(a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial g_1}{\partial x_2}(a) \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial g_2}{\partial x_2}(a) \end{bmatrix} = [D_y f(a,b)]^{-1} .D_x f(a,b)$$

or

$$[D_y f(a,b)]^{-1} = \frac{1}{20} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$$

$$D_x f(a,b) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a,b) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a,b) & \frac{\partial f_1}{\partial x_3}(a,b) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a,b) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a,b) & \frac{\partial f_2}{\partial x_3}(a,b) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

donc

$$Dg(a) = \frac{1}{20} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & -\frac{3}{20} \\ -\frac{1}{2} & \frac{6}{5} & \frac{1}{10} \end{bmatrix}$$

d'où

$$\begin{cases} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(a) = \frac{1}{4}, \frac{\partial g_1}{\partial x_2}(a) = \frac{1}{5}, \frac{\partial g_1}{\partial x_3}(a) = -\frac{3}{20} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1}(a) = -\frac{1}{2}, \frac{\partial g_2}{\partial x_2}(a) = \frac{6}{5}, \frac{\partial g_2}{\partial x_3}(a) = \frac{1}{10} \end{cases}$$

2 Exercices avec Aide

2.1 Exercice FPVINP-14

1. Montrer que l'équation $f(x,y) = 0$ avec $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy - 1$, $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$ définit sur un ouvert U contenant $a = 0$ une fonction $x \to g(x)$ telle que $g(0) = 1$ et g de classe C^1 sur U, calculer $g'(0)$.
2. Donner une équation différentielle vérifiée sur U par cette fonction.

Aide :

1. On vérifie les hypothèses du théorème des fonctions implicites avec $\Omega = \mathbb{R}^2, (a,b) = (0,1), f(a,b) = 0, \dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 3 \neq 0$.

   On calcule $g'(0)$ à l'aide de ce théorème $g'(0) = 1$.
2. La fonction g est telle que :

   $$\forall x \in U, x^3 + (g(x))^3 - 3xg(x) - 1 = 0$$

   La fonction $x \to x^3 + (g(x))^3 - 3xg(x) - 1$ étant constante (égale à 0) sur l'ouvert U, on en déduit l'équation différentielle. On remarque que l'on peut, à partir de cette équation différentielle, calculer $g'(0)$.

2.2 Exercice FPVINP-15

Soit l'équation $f(x_1, x_2, y) = 0$ avec $f(x_1, x_2, y) = \ln(1 + x_2 - y) - x_1 - y$ avec $(x_1, x_2, y) \in \Omega = \{(x_1, x_2, y) \in \mathbb{R}^3 | 1 + x_2 - y > 0\}$

1. Montrer qu'il est possible de construire une fonction g de classe C^1 sur un ouvert U contenant $(0, 0)$ tq $g(0, 0) = 0$.
2. Calculer $\dfrac{\partial g}{\partial x_1}(0, 0)$ et $\dfrac{\partial g}{\partial x_2}(0, 0)$.

Aide :

1. . $\Omega = \{(x_1, x_2, y) \in \mathbb{R}^3 | 1 + x_2 - y > 0\}$ ouvert de $\mathbb{R}^3$ (car $(x_1, x_2, y) \to 1 + x_2 - y$ est continue sur $\mathbb{R}^3$).
   . f est de classe C^1 sur Ω.
   . $(a, b) = (0, 0, 0)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a, b) = -2 \neq 2$.
2. Deux façon de calculer $\dfrac{\partial g}{\partial x_1}(0, 0)$, $\dfrac{\partial g}{\partial x_2}(0, 0)$
   . soit à l'aide des fonctions implicites,
   . soit en revenant à la définition de la différentielle de g au point (x_1, x_2), c'est à dire à la formule de Taylor à l'ordre 1 et en utilisant la relation vérifiée par g sur U.

   On trouve : $\dfrac{\partial g}{\partial x_1}(0, 0) = -\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{\partial g}{\partial x_2}(0, 0) = \dfrac{1}{2}$