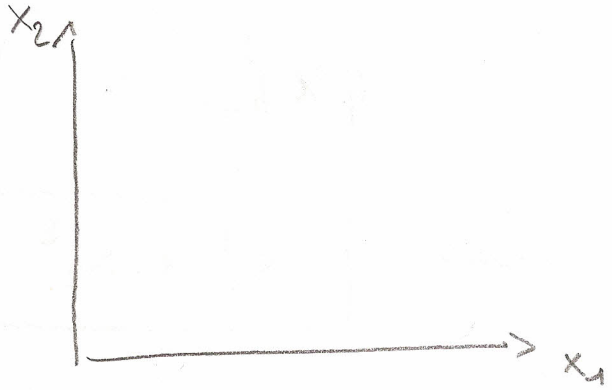
Dessin des normes.

① On prend en 2D (cad dans $\mathbb{R}^2$)

un repère :



$x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$

② On s'intéresse à la distance d'un point x à l'origine O de coordonnées $(0,0)$.

$$d(x, O) = \|(x_1, x_2) - (0,0)\|$$
$$= \|(x_1, x_2)\| = \|x\|$$

③ On considère la boule de rayon r et de centre O : cad tous les points x tq

$d(x, O) \leq r$ (ou $< r$ pour les boules ouvertes)

ici on prend $r = 1$

Donc on s'intéresse à

$$\boxed{d(x, O) = \|x\| \leq 1.}$$

④ Maintenant il faut choisir une norme.

Commençons par $\|\cdot\|_2$ associé à d_2

on a : $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leq 1$

$\iff \boxed{x_1^2 + x_2^2 \leq 1}$ en élevant au carré de chaque côté

on a $x_1^2 + x_2^2 = 1$ est l'équation du cercle de centre O et de rayon 1 et c'est la frontière de la boule.

Donc $x_1^2 + x_2^2 \leq 1$ définit tout les points du disque de centre O et de rayon 1.

⑤ On prend $\|\cdot\|_1 \iff d_1$

on a

$\|\cdot\|_1 = |x_1| + |x_2| \leq 1$

si on considère la frontière de la boule, on a

$$|x_1| + |x_2| = 1$$

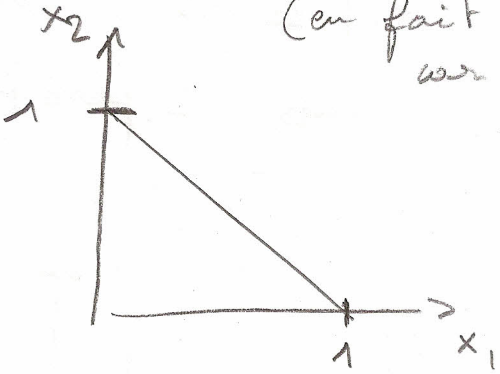
d'où $\quad |x_2| = 1 - |x_1| \quad (*)$

on regarde les cas

i) si $x_1 \geq 0$ et $x_2 \geq 0$

$(*) \Rightarrow \quad \underbrace{x_2 = 1 - x_1}_{\text{c'est une droite}}$

(en fait un segment car on reste avec $x_1 \geq 0$ et $x_2 \geq 0$)



ii) si $x_1 \geq 0$ et $x_2 \leq 0$

$(*) \Rightarrow$

$$-x_2 = 1 - x_1$$

$$\Leftrightarrow x_2 = x_1 - 1$$

c'est un autre segment.

iii) si $x_1 \leq 0$ et $x_2 \geq 0$

$(*) \Rightarrow$

$$\underbrace{x_2 = 1 + x_1}_{\text{autre segment}}$$

iv) si $x_1 \leq 0$ et $x_2 \leq 0$

$(*) \Rightarrow$

$$-x_2 = 1 + x_1$$

$$\underbrace{x_2 = -x_1 - 1}_{\text{autre segment}}$$

et on retrouve le dessin de la correction.

⑥ on prend $\|\cdot\|_\infty \longleftrightarrow d_\infty$

on a

$$\|\cdot\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|\} \leq 1$$

si on prend la frontière

$$\max\{|x_1|, |x_2|\} = 1$$

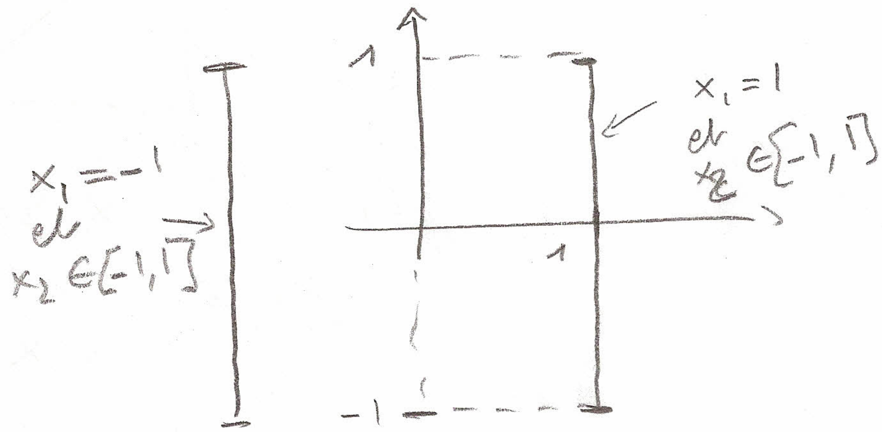
on a

$$|x_1| = 1 \quad \text{ou} \quad |x_2| = 1$$

i) $|x_1| = 1$ et $-1 \leq x_2 \leq 1$

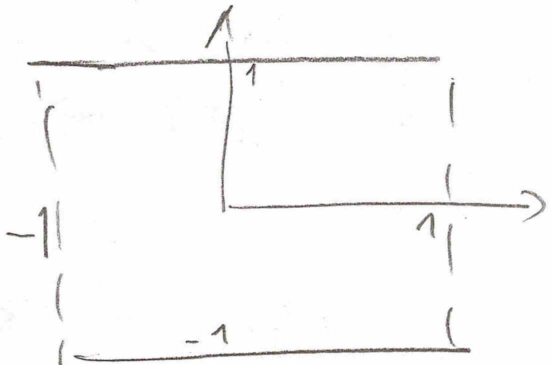
$\Longrightarrow$ 2 possibilités

$x_1 = 1$ et $x_1 = -1$



ii) $|x_2| = 1$ et $x_1 \in [-1, 1]$

$\Longrightarrow$



d'où le dessin de la correction.