Correction Partiel FPV

Frédéric Messine

Total sur 21

1 Continuité et Différentiabilité

5,5 : 1, 1.5, 1.5, 1.5

- $f_1(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|xy|}{x^2+y^2-|xy|} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

→ f_1 est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ d'après les th. de composition de fcts continues et différentiables

→ en $(0,0)$, sur la direction $y = x$, on a

$$f_1(x,x) = \frac{x^2}{x^2+x^2-x^2} = 1$$

donc $\lim_{x \to 0} f_1(x,x) = 1 \neq 0$

donc f_1 n'est pas continue en $(0,0)$

et n'est pas non plus différentiable en $(0,0)$

- $f_2(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(xy)^2}{x^2+y^2-|xy|} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{Sinon} \end{cases}$

→ f_2 est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ d'après les th. de comp de fonctions continues et différentiables.

→ en $(0,0)$

En utilisant : $(|x|-|y|)^2 = x^2+y^2-2|xy| \geq 0$

on a $x^2+y^2-|xy| \geq |xy|$

d'où $(xy)^2 \leq (x^2+y^2-|xy|)^2$

donc

$$|f_2(x,y)| \leq x^2+y^2-|xy|$$

et donc

$$0 \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} |f_2(x,y)| \leq 0$$

ce qui montre la continuité de f_2 en $(0,0)$.

f_2 est elle différentiable en $(0,0)$?

au vu de la définition si elle l'était, on aurait

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = \frac{\partial f(0,0)}{\partial y} = 0$$

Etudions maintenant

$$\varepsilon(h,k) = \frac{f(h+0,k+0) - f(0,0)}{\|(h,k)\|} = \frac{(hk)^2}{h^2+k^2-|hk|} \times \frac{1}{\|(h,k)\|}$$

on rq que $\varepsilon(h,k) = |\varepsilon(h,k)|$.

$$\varepsilon(h,k) \leqslant \left(h^2+k^2-|hk|\right) \times \frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}} \leqslant (h^2+k^2) \times \frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$\leqslant \sqrt{h^2+k^2}$$

on a bien que $\boxed{\lim_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon(h,k) = 0}$

donc f_2 est bien différentiable en $(0,0)$.

rq- vu en exo

- $$f_3(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2} + 1 & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

f_3 est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ d'après les th. généraux.

rq Sur cet exercice, on ne peut pas raisonner comme d'habitude sur $|f_3(x,y)|$ qui tend vers 0, car on doit montrer que cela tend vers 1 (pour avoir la continuité), il faut en plus un minorant.

$$|f_3(x,y)| = \left|\frac{x^2y}{x^2+y^2} + 1\right|$$

d'où $$|f_3(x,y)| \leqslant \left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right| + 1$$

dire que $\left|\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}\right| \xrightarrow[\text{qd } (x,y)\to(0,0)]{} 0$

ne suffit pas pour dire que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_3(x,y) = 1$$ on a seulement

$$\boxed{-1 \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} f_3(x,y) \leq 1}$$ avec le majorant seulement

donc on ne peut conclure comme cela.

→ Considérons donc seulement $\frac{x^2 y}{x^2+y^2} = g(x,y)$

Dans ce cas,

$$|g(x,y)| \leq \frac{x^2|y|}{x^2+y^2}$$

en prenant comme majorant

$$x^2 \leq x^2+y^2 \quad \text{et} \quad |y| \leq \sqrt{x^2+y^2}$$

on a $$|g(x,y)| \leq \frac{(x^2+y^2)^{3/2}}{x^2+y^2} = \underbrace{\sqrt{x^2+y^2}}_{\to 0 \text{ qd } (x,y)\to(0,0)}$$

donc $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = 0$$

$$\boxed{\text{et donc } \lim_{(x,y)\to(0,0)} f_3(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) + 1 = 1}$$

d'où f_3 est bien continue en $(0,0)$

→ f_3 est elle différentiable en $(0,0)$.

si elle est différentiable en $(0,0)$ on a forcément

que $\frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = \frac{\partial f(0,0)}{\partial y} = 0$ car $f(0,0) = \underset{\text{constante}}{1}$

Donc $$\varepsilon(h,k) = \frac{f_3(h,k) - f_3(0,0)}{\|(h,k)\|} = \frac{g(h,k)}{\|(h,k)\|}$$

on avait tout à l'heure le majorant suivant

$$|g(x,y)| \leqslant \sqrt{x^2+y^2}$$

on voit bien que ce majorant ne permet pas de conclure pour la limite de $|\varepsilon(h,k)|$ $(\leqslant 1)$.
Cela voudrait il dire que f_3 n'est pas differentiable en $(0,0)$?
→ sur la direction $k=h$ on a :

$$\varepsilon(h,k) = \frac{g(h,h)}{\sqrt{2}\,|h|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{|h|^3}{|h|(2h^2)}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4} \times \frac{|h|^3}{|h|^3} = \frac{\sqrt{2}}{4} \neq \underline{\underline{0}}$$

Donc f_3 n'est pas différentiable en $(0,0)$

- $$f_4(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y^2 - y^2 - 3x^2y^2 + 3xy^2}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Il y a une petite erreur dans l'énoncé, le pb est que cette fonction n'est pas définie en $(1,0)$, et donc elle n'est pas continue, ni différentiable en $(1,0)$.

De plus, elle est parfaitement définie sur tout $\mathbb{R}^2 \setminus \{(1,0)\}$, et donc d'après les théorèmes généraux sur la composition des fonctions continues et différentiables, f_4 est continue et différentiable sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(1,0), (0,0)\}$.
Est elle continue en $(0,0)$ car on a 2 définitions et il faut qu'elles coïncident.

Appelons $g(x,y) = \dfrac{x^3y^2 - y^2 - 3x^2y^2 + 3xy^2}{\sqrt{(x-1)^2 + y^2}}$

$$= \frac{y^2(x-1)^3}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}$$

$$g(0,0) = 0 = f_4(0,0).$$

Donc f_4 est continue en $(0,0)$ (même définition)

f_4 est elle différentielle en $(0,0)$?

Ici aussi il faut que les définitions coïncident :

$$\frac{\partial f_4(0,0)}{\partial x} = \frac{\partial f_4(0,0)}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial g(0,0)}{\partial x} = \frac{3(x-1)^2y^2\sqrt{(x-1)^2+y^2} + y^2(x-1)^3\dfrac{\cancel{2}(x-1)}{\cancel{2}((x-1)^2+y^2)^{3/2}}}{(x-1)^2+y^2}$$

$= 0$ (car y^2 sont en facteur).

$$\frac{\partial g(0,0)}{\partial y} = \frac{2y(x-1)^3\sqrt{(x-1)^2+y^2} + y^2(x-1)^3\dfrac{\cancel{2}y}{\cancel{2}((x-1)^2+y^2)^{3/2}}}{(x-1)^2+y^2}$$

$= 0$ (car $y=0$ et $y^2=0$)

Donc f_4 est aussi différentielle en $(0,0)$.

Exo 2. Dérivation $\boxed{3\text{pts}}$

$$\Phi(x_1,x_2) = (x_1^2, x_2^2, 2x_1x_2)$$

$$f(x_1,x_2,x_3) = \sqrt{x_1+x_2+x_3}$$

1. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$\nabla f(x_1,x_2,x_3) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2\sqrt{x_1+x_2+x_3}} \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x_1+x_2+x_3}} \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x_1+x_2+x_3}} \end{pmatrix}$$

$\Phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$\longrightarrow$ Matrice Jacobienne

$$J\Phi(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial \Phi_1(x)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \Phi_2(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial \Phi_2(x)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \Phi_3(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial \Phi_3(x)}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

$$= \boxed{\begin{pmatrix} 2x_1 & 0 \\ 0 & 2x_2 \\ 2x_2 & 2x_1 \end{pmatrix}}$$

$$f \circ \Phi(x) = f(x_1^2, x_2^2, 2x_1x_2) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2}$$
$$= \sqrt{(x_1 + x_2)^2}$$
$$= |x_1 + x_2|$$

soit, $h(x) = f \circ \Phi(x) = |x_1 + x_2|$

$h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\nabla h(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \frac{|x_1 + x_2|}{x_1 + x_2} \\ \frac{|x_2 + x_1|}{x_1 + x_2} \end{pmatrix}$$

dépend du signe de $x_1 + x_2$ si > 0 $\Longrightarrow$ $\nabla h(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

si < 0 $\nabla h(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

⚠ Attention h n'est pas différentiable en $(0,0)$!
et plus généralement
h n'est différentiable que
sur $\boxed{D = \{(x_1, x_2) \,/\, x_1 \neq -x_2\}}$

(Ceci n'était pas demandé si explicitement...)

2. Dérivées secondes :

$$H_f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{1}{2\sqrt{u}} & \frac{\partial}{\partial x_2}\frac{1}{2\sqrt{u}} & \frac{\partial}{\partial x_3}\frac{1}{2\sqrt{u}} \\ & // & \\ & // & \end{pmatrix}$$

en plus tout est symétrique en x :

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{1}{2\sqrt{x_1+x_2+x_3}} = \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{1}{2\sqrt{u}} = \frac{-1}{2}\frac{\frac{\partial \sqrt{u}}{\partial x_i}}{\sqrt{u}^2}$$

$$= -\frac{1}{4(u)^{3/2}} \quad \forall i \in \{1,2,3\}$$

avec $u = x_1 + x_2 + x_3$

d'où
$$H_{f(x)} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4u^{3/2}} & -\frac{1}{4u^{3/2}} & -\frac{1}{4u^{3/2}} \\ -\frac{1}{4u^{3/2}} & -\frac{1}{4u^{3/2}} & -\frac{1}{4u^{3/2}} \\ -\frac{1}{4u^{3/2}} & -\frac{1}{4u^{3/2}} & -\frac{1}{4u^{3/2}} \end{pmatrix} = -\frac{1}{4u^{3/2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

. Pour h.

si $x_1 + x_2 > 0$,

$$H_h(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et si $x_1 + x_2 < 0$

$$H_h(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

③. <u>Optimisation</u> $\boxed{6,5 \text{ points}}$

<u>Rappel</u>. $\lim_{\substack{x \to 0^+ \\ x \in \mathbb{R}_*^+}} x \ln x = 0$ car $\ln x$ est défini sur $\mathbb{R}_*^+$.

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\ln(x^2+y^2), & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Continuité en $(0,0)$?

Oui car si on pose $z = x^2+y^2 \quad z \geqslant 0$.

on a bien que $\lim_{z \to 0^+} z \ln z \left(= \lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)\right) = \underline{\underline{0}}$

Donc f est continue.

2. f est-elle différentiable en $(0,0)$?

si elle est différentiable alors

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = \frac{\partial f(0,0)}{\partial y} = 0 \quad \text{car } f(0,0) = 0.$$

d'où

$$\varepsilon(h,k) = \frac{(h^2+k^2)\ln(h^2+k^2)}{\|(h,k)\|}$$

$$= \sqrt{h^2+k^2}\,\ln\left(\sqrt{h^2+k^2}\right)^2$$

$$= 2\sqrt{h^2+k^2}\,\ln\left(\sqrt{h^2+k^2}\right)$$

En posant $z = \sqrt{h^2+k^2}$ $(z \geqslant 0)$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon(h,k) = \lim_{z\to 0^+} 2z\ln z = \underline{0}$$

D'où f est bien différentiable en $(0,0)$.

3.

- $$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2x\ln(x^2+y^2) + \frac{(x^2+y^2)\,2x}{(x^2+y^2)}$$

$$= \underline{2x\left(\ln(x^2+y^2)+1\right)}$$

et par symétrie :

- $$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \underline{2y\left(\ln(x^2+y^2)+1\right)}$$

Le gradient s'annule en $(0,0)$, mais aussi quand $\ln(x^2+y^2) = -1$

donc ssi $\boxed{x^2+y^2 = e^{-1}}$

Donc le gradient s'annule ~~aussi~~ sur

$$\mathcal{C} = \{(x,y) \mid y^2+x^2 = e^{-1}\}$$

$\mathcal{C}$ étant un cercle de centre $(0,0)$ et de rayon $\sqrt{e^{-1}}$. $\simeq 0.6065...$ (9)

rq- les points $(0, \sqrt{e^{-1}})$ et $(\sqrt{e^{-1}}, 0)$ sont sur le cercle.

4. le point $(0,0)$ est un point où le gradient est nul, il est donc intéressant de le considérer de manière particulière

$$f(0,0) = 0$$

En remarquant que dans un voisinage de $(0,0)$, i.e.

$$\forall (x,y) \in B_r((0,0)) = \{(x,y) / x^2+y^2 < r\}$$

$$\text{si } r < 1$$

$$\text{alors } (x^2+y^2) \geqslant 0$$

$$\text{et } \ln(x^2+y^2) < 0$$

car $\ln 1 = 0$
et $\ln$ est croissante sur $\mathbb{R}_*^+$.

$$\text{donc } \forall (x,y) \in B_r((0,0)),$$

$$f(x,y) \leqslant 0 = f(0,0)$$

<u>Donc</u>. $(0,0)$ est un <u>maximum local</u>.

5. (De manière intuitive + ou −)
Comme $(0,0)$ est un maximum la fonction est concave autour de ce point dans un certain voisinage jusqu'à ce que le gradient s'annule à nouveau sur le cercle $\mathcal{C}$.

Que se passe t'il après ?
C'est à dire pour tous les points tq

$$x^2+y^2 > e^{-1}$$

rq : on sait que pour les points (x,y) tq

$$e^{-1} \leqslant x^2+y^2 \leqslant 1$$

$$f(x,y) \leq 0 \; (= f(0,0))$$

et quand $x^2+y^2=1$

$$f(x,y) = 1 \times \ln 1 = 0.$$

Donc sur $\mathcal{C}_2 = \{(x,y) \text{ tq } x^2+y^2=1\}$

on est revenu au niveau du maximum en $(0,0)$: c'est donc bien un <u>maximum local</u>

En remarquant que quand $x^2+y^2 \geqslant 1$

$\ln(x^2+y^2) > 0$ et x^2+y^2 aussi

$(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2) > 0$ et td vers $+\infty$ qd $\|(x,y)\| \longrightarrow +\infty$.

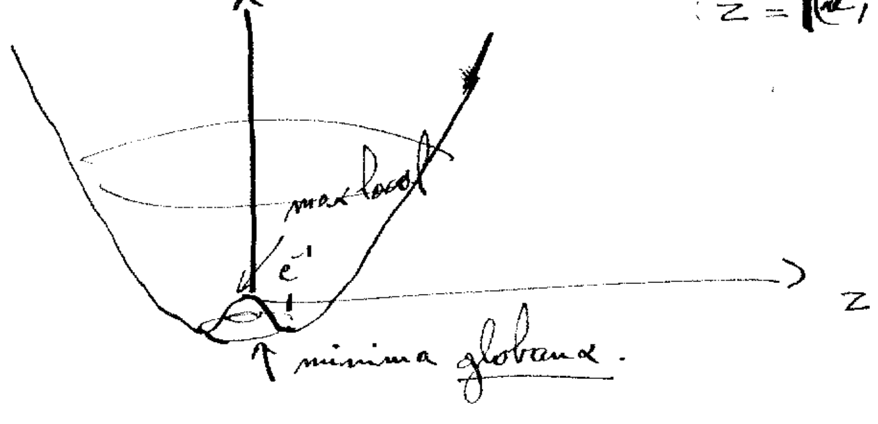
car $x^2+y^2 = \|(x,y)\|^2$

Intuitivement, on peut dire que tous les points sur $\mathcal{C}$ sont les minimums globaux de f.

<u>Allure</u> : symétrie entre x & y.
on peut considérer le pb équivalent d'une seule variable

$$\|(x,y)\|^2 \ln \|(x,y)\|^2 = |z|\ln|z|$$

$$: z = \|(x,y)\|^2$$



4) Formes Différentielles. 5 points

1.)

- $\omega_1 = \underbrace{(x^2+xy)}_{P(x,y)}\,dx + \underbrace{\left(\frac{x}{2}+y^2\right)}_{Q(x,y)}\,dy$

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = x \quad \neq \quad \text{et} \quad \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = \frac{1}{2}$$

ce n'est pas une forme exacte.

2. $\omega_2 = \underbrace{\left(\operatorname{arctg}(xy) + \ln(xyz)+1\right)}_{P(x,y,z)}dx + \underbrace{\left(\operatorname{arctg}(xy) + \frac{x}{y} + z^2\right)}_{Q(x,y,z)}dy + \underbrace{\left(\ln(xyz)+1\right)}_{R(x,y,z)}dz$

$$\frac{\partial Q(x,y,z)}{\partial z} = 2z$$

$$\neq$$

$$\frac{\partial R(x,y,z)}{\partial y} = \frac{xz}{xyz} = \frac{1}{y}$$

ce n'est pas une forme différentielle.

3. $\omega_3 = \underbrace{\left(\frac{1}{x} + e^{xy}\right)}_{P(x,y,z)}dx + \underbrace{\left(\frac{1}{y^2} + e^{xy}\right)}_{Q(x,y,z)}dy + \underbrace{\left(\frac{1}{1+z^2}\right)}_{R(x,y,z)}dz$

$$\frac{\partial P(x,y,z)}{\partial z} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial R(x,y,z)}{\partial x} = 0$$

même chose avec $\frac{\partial Q(x,y,z)}{\partial z} = 0 = \frac{\partial R(x,y,z)}{\partial y}$

Il reste

$$\frac{\partial P(x,y,z)}{\partial y} = xe^{xy}$$

$$\neq$$

$$\frac{\partial Q(x,y,z)}{\partial x} = ye^{xy}$$

Ce n'est donc pas une forme différentielle.

$\underline{rq}$ - Il y avait une erreur dans le texte

$$\omega_3 = \left(\frac{1}{x} + \frac{e^{xy}}{x}\right) dx + \left(\frac{1}{y^2} + \frac{e^{xy}}{y}\right) dy + \left(\frac{1}{1+z^2}\right) dz$$

qui elle était une forme différentielle.
c'était ainsi plus simple.

- $\omega_4 = \underbrace{\left(\ln(x^2-1) + y^2\right)}_{P(x,y)} dx + \underbrace{(2xy - y^2)}_{Q(x,y)} dy$

$$\boxed{\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = 2y = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}}$$

c'est une forme différentielle.

2). Comme ω_1, ω_2 et aussi ω_3 (à cause de l'erreur d'énoncé) ne sont pas des différentielles on n'a rien à faire !

3). Considérons ω_4.

Que peut on dire de $(\sqrt{2}, 0)$?

on a $P(\sqrt{2}, 0) = \ln(\sqrt{2}^2 - 1) = \ln 1 = 0$

$Q(\sqrt{2}, 0) = 0$

or $\omega_4 = d F_4$

et $\frac{\partial f_4}{\partial x}(\sqrt{2}, 0) = \frac{\partial f_4}{\partial y}(\sqrt{2}, 0) = 0$

Donc $(\sqrt{2}, 0)$ est un point où le gradient s'annule pour f_4.

Calculons les dérivées secondes :

$$\frac{\partial^2 f_4(x,y)}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} P(x,y) = \frac{2x}{(x^2-1)}$$

$$\frac{\partial^2 f_4(x,y)}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} Q(x,y) = 2x - 2y.$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} f_4(x,y) = 2y \quad (cf. 1.)$$

on a donc en $(\sqrt{2}, 0)$

$$s = 0$$
$$r = 2\sqrt{2}$$
$$t = 2\sqrt{2}$$

$$\Delta' = s^2 - rt = -8 < 0$$
$$r > 0 \Rightarrow (\sqrt{2}, 0)$$ est un minimum local.

Fin

Commentaires :

(1). questions 1) et 2) ont été vue en exercices à rendre.
3) présentait une petite difficulté
4) ne présentait pas de difficulté particulière

(2). Application directe du calcul des gradiants, Jacobien et Hessien. Une petite difficulté à cause de $f \circ \varphi$ pas dérivable en $x_1 = -x_2$ mais ce n'est pas pris en compte dans la notation.

(3) Assez facile après correction mais assez intuitif tout de même. Il fallait se représenter la fonction dans une direction pour avoir les idées.

(4) FACILE.

Complément ~~[illegible]~~ pour la question ③. 4.

Point $(0,0)$?

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2x\left(\ln(x^2+y^2)+1\right)$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 2y\left(\ln(x^2+y^2)+1\right)$$

En calculant les dérivées secondes :

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = 2\ln(x^2+y^2)+2+2x\left(\frac{2x}{x^2+y^2}\right)$$

$$= 2\ln(x^2+y^2)+2+\frac{4x^2}{x^2+y^2}$$

par symétrie

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = 2\ln(x^2+y^2)+2+\frac{4y^2}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = 2y\,\frac{2x}{(x^2+y^2)} = \frac{4xy}{x^2+y^2}$$

D'où en $(0,0)$ on a :

$r = ?$
$s = ?$ car ce n'est pas dérivable
$t = ?$ 2 fois ! Directement

ça aurait été intéressant de montrer cela.

(Dans le meilleur des cas $r=0$, $s=0$, et $t=0$ mais c'est impossible ici car $\ln(x^2+y^2) \to -\infty$ qd $x^2+y^2 \to 0^+$)

→ En $(x,y) \in \mathscr{C}$.

$$r = -2+2+\frac{4x^2}{e^{-1}} = \frac{4x^2}{e^{-1}} = 4e\,x^2$$

$$t = \frac{4y^2}{e^{-1}} = 4e\,y^2 \qquad \Delta' = s^2 - rt = \text{~~[illegible]~~}$$

$$s = \frac{4xy}{e^{-1}} = 4e\,xy. \qquad \Delta = 16e^2x^2y^2 - 16e^2x^2y^2 = 0$$

On ne peut pas conclure non plus !