– Correction FPV – Examen 2006 –

F. Messine.

Exercice 1 : Continuité et Différentiabilité

1. Continuité en $(0,0,0)$

$$f_1(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{|xyz|^\alpha}{\sqrt{x^2+y^4+z^6}} & \text{si } (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$|x| \leq \sqrt{x^2+y^4+z^6}, \quad |y| \leq \sqrt[4]{x^2+y^4+z^6}, \quad |z| \leq \sqrt[6]{x^2+y^4+z^6}$$

D'où

$$0 \leq f_1(x,y,z) \leq \frac{(x^2+y^4+z^6)^{\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha}{4}+\frac{\alpha}{6}}}{(x^2+y^4+z^6)^{1/2}}$$

$$\leq |x^2+y^4+z^6|^{(6+3+2)\frac{\alpha}{12}-\frac{1}{2}}$$

rq : c'est > 0 les valeurs absolues n'ont pas d'importance.

$$\leq |x^2+y^4+z^6|^{\frac{11\alpha-6}{12}}$$

Cas :

1) si $11\alpha - 6 > 0$ soit $\boxed{\alpha > \frac{6}{11}}$

Alors $0 \leq \lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f_1(x,y,z) \leq \underbrace{\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} |x^2+y^4+z^6|^{\frac{11\alpha-6}{12}}}_{=0}$

D'où $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f_1(x,y,z) = 0$ par encadrement.

Les limites coïncident et f_1 est continue en $(0,0,0)$ si $\boxed{\alpha > \frac{6}{11}}$

2). si $\alpha \leq \frac{6}{11}$,

en posant la direction $y = x^{\frac{1}{2}}$ et $z = x^{\frac{1}{3}}$

on a,

$$f_1(x,x^{\frac12},x^{\frac13}) = \frac{|x|^{\alpha}\,|x|^{\frac{\alpha}{2}}\,|x|^{\frac{\alpha}{3}}}{\sqrt{3}\;|x|} = \frac{1}{\sqrt{3}}\;|x|^{\frac{11}{6}\alpha-1}$$

. si $\boxed{\alpha = \frac{6}{11}}$ $\Longrightarrow$ $f_1(x,x^{\frac12},x^{\frac13}) \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} \neq 0$

ce n'est pas continu.

. si $\boxed{\alpha < \frac{6}{11}}$

$\Longrightarrow f_1(x,x^{\frac12},x^{\frac13}) \longrightarrow +\infty$

~~donc~~ ce n'est pas continu.

. Différentiabilité en $(0,0,0)$?

Quand (x,y,z) se rapproche de $(0,0,0)$

on a $\quad y^2 \geqslant y^4$, $\quad z^2 \geqslant z^6$ $\quad\Longrightarrow x^2+y^2+z^2 \geqslant x^2+y^4+z^6$ et $\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{x^2+y^4+z^6}}$

D'où

$$0 \leqslant \varepsilon(h,k,l) = \frac{f_1(h,k,l)}{\|(h,k,l)\|_2} \leqslant \frac{|hkl|^{\alpha}}{\left(\sqrt{h^2+k^4+l^6}\right)^2}$$

on tombe sur $\varepsilon(h,k,l) \leqslant |h^2+k^4+l^6|^{\frac{11}{12}\alpha-1}$

1) si $\boxed{\alpha > \frac{12}{11}}$ la lim $\varepsilon = 0$ et c'est différentiable

2)

Un minorant de

$\varepsilon(h,k,l)$ est : $\frac{|hkl|^{\alpha}}{h^2+k^2+l^2} \geqslant 0$

Direction $h = k = l$

$$\frac{|h|^{3\alpha}}{3\,|h|^2} = \frac{1}{3}|h|^{3\alpha-2}$$ ne tend pas vers 0 si $3\alpha-2 \leqslant 0$.

donc si $\boxed{\alpha \leq \frac{2}{3}}$ f_1 n'est pas différentiable

entre $\frac{2}{3}$ et $\frac{12}{11}$ soit $\boxed{\forall \alpha \in \left]\frac{2}{3}, \frac{12}{11}\right]}$

ce n'est pas facile de répondre sur la différentiabilité.

Bien sûr $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3_*$ f_1 est continue et diff. comme composition de fonctions continues et différentiables.

2.
$$f_2(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x-1)^\alpha (y+1)^2}{\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2}} + 1 & \text{si } (x,y) \neq (1,-1) \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

f_2 est ~~cont. et~~ continue et différentiable sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(1,-1)\}$.

Considérons

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^\alpha y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

on remarque $f_2(x,y) = g(x-1, y+1) + 1$

. $x^\alpha \leq \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^\alpha$ $\left(\begin{array}{l} \text{si } x \geq 0 \\ \text{et } x < 0 \end{array}\right)$

. $y^2 \leq x^2+y^2$

$$g(x,y) \leq (x^2+y^2)^{\frac{\alpha}{2}+1-\frac{1}{2}}$$
$$\leq (x^2+y^2)^{\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}}$$
$$\longrightarrow 0 \text{ ssi } \frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2} > 0$$

d'où $\boxed{\alpha > -1}$

Donc g est continue en $(0,0)$ si $\alpha > -1$

or $g(x,y) = f_2(x+1, y-1) - 1$

Donc f_2 est aussi continue en $(1,-1)$

si $\boxed{\alpha > -1}$.

- si $\boxed{\alpha = -1}$ $\quad g(x,x) = \dfrac{x}{|x|} \longrightarrow +1$ si $x \to 0^+$

$\longrightarrow -1$ si $x \to 0^-$

$\neq 0$

donc ce n'est pas continue

- si $\boxed{\alpha < -1}$ $\quad g(x,x) = \dfrac{x^{2+\alpha}}{|x|} = \underbrace{x^{1+\alpha}}_{\text{or } \alpha < -1}$

d'où $g(x,x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} +\infty$

$g(x,x) \xrightarrow[x \to 0^-]{} -\infty$

c'est pas continue

$\Rightarrow f$ pas continue en $(1,-1)$ pour $\underline{\alpha \leq 1}$.

Différentiabilité :

Etudions toujours g :

$$\varepsilon(h,k) = \frac{|h^\alpha k^2|}{\sqrt{h^2+k^2}\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{|h|^\alpha k^2}{h^2+k^2}$$

$|h|^\alpha \leq \left(\sqrt{h^2+k^2}\right)^\alpha$ et $k^2 \leq h^2+k^2$

d'où

$$\varepsilon(h,k) \leqslant (h^2+k^2)^{\frac{\alpha}{2}+1-1} = (h^2+k^2)^{\frac{\alpha}{2}}$$

- si $\boxed{\alpha > 0}$ $\quad \boxed{\varepsilon(h,k) \xrightarrow[(h,k)\to(0,0)]{} 0}$

$\Rightarrow g$ est diff en $(0,0)$ et f est donc ~~différentielle~~ diff en $(1,-1)$

- si $\alpha \leq 0$

on ne peut pas conclure avec ce majorant.

si $\boxed{\alpha = 0}$ $\quad \varepsilon(h,k) = \dfrac{k^2}{h^2+k^2}$

si on prend $h = k$, on a :

$$\varepsilon(h,h) = \frac{h^2}{2h^2} = \frac{1}{2} \text{ et donc.}$$

g et f ne sont pas diff en $(0,0)$ et $(1,-1)$ respectivement

- si $\alpha < 0$

on prend $h = k$

$$\varepsilon(h,h) = \frac{|h|^{2+\alpha}}{2h^2} = \frac{1}{2}|h|^\alpha \underset{qd\ h \to 0}{\longrightarrow} +\infty.$$

ce n'est pas différentiable non plus.

D'où

f n'est pas diff pour $\boxed{\alpha \leqslant 0}$ au point $(1,-1)$.

et est diff pour $\alpha > 0$.

3.

$$f_3(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x,y) \in \mathcal{C} \setminus \{(0,0)\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$\mathcal{C} = \{(x,y) : x^2 + (y-1)^2 = 1\}$

on voit que $(0,0)$ est un pt de $\mathcal{C}$ $(0^2 + (0-1)^2 = 1)$.

f_3 n'est pas continue en $(0,0)$ car

$$\lim_{\substack{(x,y) \to (0,0) \\ \text{et } (x,y) \in \mathcal{C}}} f_3(x,y) = 1 \neq 0 = f_3(0,0)$$

c'est une direction

Donc f_3 n'est pas différentiable en $(0,0)$.

4.

$$f_4(x,y) = \begin{cases} x^2+y^2 & \text{si } (x,y) \in \mathcal{C} \setminus \{(0,0)\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Dans ce cas

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} f_4(x,y) = 0$$

pour toute direction sauf $(x,y) \in \mathcal{C}$

et

$$\lim_{\substack{(x,y) \to (0,0) \\ (x,y) \in \mathcal{C}}} f_4(x,y) = \lim_{\substack{(x,y) \to (0,0) \\ (x,y) \in \mathcal{C}}} x^2+y^2 = 0$$

$\boxed{f_4 \text{ est continue en } (0,0)}$

$$\underset{\text{avec } (h,k)\in\mathcal{C}}{\varepsilon(h,k)} = \frac{h^2+k^2}{\sqrt{h^2+k^2}} = \sqrt{h^2+k^2}$$

et $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon(h,k) = 0$

direction $(h,k)\in\mathcal{C}$ car toutes les autres dir. $f_4(x,y)=0$ et c'est une fonction cont et différentiable.

$\boxed{f_4 \text{ est donc différentiable en } (0,0)}$.

Sur $\mathbb{R}^2$:

- f_4 est continue et différentiable sur tout $\mathbb{R}^2\setminus(\mathcal{C}\setminus\{(0,0)\})$ (fonction nulle).
- f_4 n'est pas continue et donc non diff sur $\mathcal{C}\setminus\{(0,0)\}$

car soit $(a,b)\in\mathcal{C}\setminus\{(0,0)\}$

$$f_4(a,b) = a^2+b^2 > 0$$

et donc si on fait tendre (x,y) vers (a,b) par une autre direction que $(x,y)\in\mathcal{C}$, on aura

$$\boxed{\lim_{\substack{(x,y)\to(a,b)\\(x,y)\notin\mathcal{C}}} f_4(x,y) = 0 \neq a^2+b^2}$$

Exercice 2 : Dérivation

$$f(x,y,z) = 2x^2+3y^2+xy-z^2+1$$

$$\Phi(r,\theta,z) = (r\cos\theta,\ r\sin\theta,\ z)$$

1. $$\boxed{\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 4x+y \\ 6y+x \\ -2z \end{pmatrix}}$$

$$\boxed{H_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}}$$

rq : H_f est constante car ∇f est linéaire et f est quadratique.

2. $$F(r,\theta,z) = f(\Phi(r,\theta,z)) = f(r\cos\theta,\ r\sin\theta,\ z)$$

$$= 2(r\cos\theta)^2 + 3(r\sin\theta)^2 + r^2\cos\theta\sin\theta - z^2+1$$

$$= 2r^2\cos^2\theta + 3r^2\sin^2\theta + r^2\cos\theta\sin\theta - z^2+1$$

$$= 2r^2 + r^2(\sin^2\theta + \cos\theta\sin\theta) - z^2+1$$

$$\nabla F(r,\theta,z) = \begin{pmatrix} 4r + 2r(\sin^2\theta+\cos\theta\sin\theta) \\ 2r^2\cos\theta\sin\theta + r^2(-\sin^2\theta+\cos^2\theta) \\ -2z \end{pmatrix}$$

$$\boxed{= \begin{pmatrix} 2r(2+\sin^2\theta+\cos\theta\sin\theta) \\ r^2(2\cos\theta\sin\theta - \sin^2\theta+\cos^2\theta) \\ -2z \end{pmatrix}}$$

$$H_F(r,\theta,z) = \begin{pmatrix} 4+2\sin^2\theta+2\cos\theta\sin\theta & 2r(2\cos\theta\sin\theta-\sin^2\theta+\cos^2\theta) & 0 \\ 2r(2\cos\theta\sin\theta-\sin^2\theta+\cos^2\theta) & 2r^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta-2\cos\theta\sin\theta) & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

3. $$J_\Phi(r,\theta,z) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(\Phi(r,\theta,z)) = \begin{pmatrix} 4r\cos\theta + r\sin\theta \\ 6r\sin\theta + r\cos\theta \\ -2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(4\cos\theta+\sin\theta) \\ r(\cos\theta+6\sin\theta) \\ -2z \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(\Phi(r,\theta,z))^T \cdot J_\Phi(r,\theta,z) =$$

$$\begin{pmatrix} r(4\cos\theta+\sin\theta) & r(\cos\theta+6\sin\theta) & -2z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} r(4\cos^2\theta+\cos\theta\sin\theta) + r(\cos\theta\sin\theta+6\sin^2\theta) \\ -r^2(4\cos\theta\sin\theta+\sin^2\theta) + r^2(\cos^2\theta+6\cos\theta\sin\theta) \\ -2z \end{pmatrix}^T$$

$$= \begin{pmatrix} 2r(2+\sin^2\theta+\cos\theta\sin\theta) \\ r^2(2\cos\theta\sin\theta-\sin^2\theta+\cos^2\theta) \\ -2z \end{pmatrix}$$

on retrouve les mêmes résultats qu'en 2.

Exercice 3 : Optimisation

1. $f(x,y) = -x^2 - 2x - y^2 + 1$

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} -2x-2 \\ -2y \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases}}$$

$$\boxed{f(-1,0) = 2}$$

or $f(x,y) = -(x+1)^2 - y^2 + 2$

et donc $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$f(x,y) \leq 2$$

Donc $(-1,0)$ est un maximum global.

2.

$$f(x_1,x_2) = 2x_1^3 - 3x_1^2 + 6x_1x_2^2 + 6x_1x_2 \,, \quad (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

$$\nabla f(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} 6x_1^2 - 6x_1 + 6x_2^2 + 6x_2 \\ 12x_1x_2 + 6x_1 \end{pmatrix}$$

$\nabla f(x_1,x_2) = 0$, on a :

$$\begin{cases} 6x_1^2 - 6x_1 + 6x_2^2 + 6x_2 = 0 & (1) \\ 6x_1(2x_2+1) = 0 & (2) \end{cases}$$

De (2) on déduit que

$$\boxed{x_1 = 0} \quad \boxed{\text{ou}} \quad \boxed{x_2 = -\frac{1}{2}}$$

- cas où $x_1 = 0$ on revient dans (1)

$$x_2^2 + x_2 = 0$$

soit $\boxed{x_2 = 0}$ ou $\boxed{x_2 = -1}$

- cas où $x_2 = -\frac{1}{2}$, on revient dans (1)

$x_1(x_1 - 1) - \frac{1}{4} = 0$ on a

$$\boxed{x_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}} \text{ ou } \boxed{x_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

On a donc 4 solutions de gradient nul :

$x^{(1)} = (0, 0)$, $x^{(2)} = (0, -1)$,

$x^{(3)} = \left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, $x^{(4)} = \left(\frac{1-\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

rq : On remarque que f peut aller en $+\infty$ et aussi en $-\infty$, il n'existe donc pas de minimum ou de maximum global.

$$\frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} = 12x_1 - 6 \; (=r) \; ; \quad \frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_2^2} = 12x_1 \; (=t)$$

$$\frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} = 12x_2 + 6 \; (=s)$$

- considérons $x^{(1)} = (0, 0)$:

$r(0,0) = -6$; $s = 6$; $t = 0$

$\Delta' = s^2 - rt = 36 > 0$

$\Rightarrow$ pas de signe constant $(0,0)$ n'est pas un extremum c'est un point stationnaire.

- considérons $x^{(2)} = (0, -1)$

$r = -6$; $s = -6$; $t = 0$

$\Delta' = 36 > 0$

$\Rightarrow$ pas un extremum

- considérons $x^{(3)} = \left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

$r = 6\sqrt{2}$; $s = 0$; $t = 6 + 6\sqrt{2}$

$\Delta' = -(6\sqrt{2})(6 + 6\sqrt{2}) < 0$

$r > 0$

Donc c'est un minimum local

- considérons $x^{(4)} = \left(\frac{1-\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

$r = -6\sqrt{2}$; $s = 0$; $t = 6 - 6\sqrt{2}$

$$\Delta' = -\underbrace{\underbrace{(-6\sqrt{2})}_{<0} \times \underbrace{(6 - 6\sqrt{2})}_{<0 \text{ car } \sqrt{2} > 1}}_{>0}$$

$r < 0$

Donc c'est un maximum local.

3) $f(x,y,z) = x^2 + 3y^2 + z^2 \underbrace{-3xy + 2xy}_{= -xy} - y + 4$

erreur dans le texte $\Rightarrow$ engendre des calculs avec $\frac{1}{11}$ Désolé.

$$\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x - y \\ 6y - x - 1 \\ 2z \end{pmatrix}$$

$\nabla f(x,y,z) = 0$

$\Rightarrow \quad z = 0 \; ; \; y = 2x \; ;$

$12x - x - 1 = 0$

D'où $\boxed{x = \frac{1}{11} \; , \; y = \frac{2}{11} \; , \; z = 0}$

$$f\left(\frac{1}{11}, \frac{2}{11}, 0\right) = \frac{1}{121} + \frac{12}{121} - \frac{3}{121} - \frac{2}{11} + 4$$

$$= \boxed{\frac{472}{121}}$$

$$H_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

D'où,

$$f(x,y,z) = f\left(\frac{1}{11}, \frac{2}{11}, 0\right) + \left(x - \frac{1}{11}, y - \frac{2}{11}, z\right) \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - \frac{1}{11} \\ y - \frac{2}{11} \\ z \end{pmatrix}$$

$$= \frac{472}{121} + \underbrace{2\left(x - \frac{1}{11}\right)^2 + 6\left(y - \frac{2}{11}\right)^2 + 2z^2 - 2\left(x - \frac{1}{11}\right)\left(y - \frac{2}{11}\right)}_{\text{Etude du signe}}$$

$$= \left(\left(x - \frac{1}{11}\right) - \left(y - \frac{2}{11}\right)\right)^2 + \left(x - \frac{1}{11}\right)^2 + 5\left(y - \frac{2}{11}\right)^2 + 2z^2 \geqslant 0$$

$$= 0 \text{ en } \left(\frac{1}{11}, \frac{2}{11}, 0\right)$$

D'où $\left(\frac{1}{11}, \frac{2}{11}, 0\right)$ est un min global.

Exercice 4 : Formes Différentielles

$$\omega_1 = \underbrace{\left(\frac{-y}{x^2+y^2} + \frac{1}{x+y+z} + 6x\right)}_{P(x,y,z)} dx + \underbrace{\left(\frac{x}{x^2+y^2} + \frac{1}{x+y+z} + 6y\right)}_{Q(x,y,z)} dy + \underbrace{\frac{1}{x+y+z}}_{R(x,y,z)} dz$$

- $$\frac{\partial P(x,y,z)}{\partial y} = -\frac{1}{x^2+y^2} + \frac{2y^2}{(x^2+y^2)^2} - \frac{1}{(x+y+z)^2}$$
$$= \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} - \frac{1}{(x+y+z)^2}$$

- $$\frac{\partial P(x,y,z)}{\partial z} = -\frac{1}{(x+y+z)^2}$$

- $$\frac{\partial Q(x,y,z)}{\partial x} = \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x^2}{(x^2+y^2)^2} - \frac{1}{(x+y+z)^2}$$
$$= \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} - \frac{1}{(x+y+z)^2}$$

- $$\frac{\partial Q(x,y,z)}{\partial z} = -\frac{1}{(x+y+z)^2}$$

- $$\frac{\partial R(x,y,z)}{\partial x} = -\frac{1}{(x+y+z)^2} = \frac{\partial R(x,y,z)}{\partial y}$$

on remarque que

$$\frac{\partial P(x,y,z)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y,z)}{\partial x}$$

et que

$$\frac{\partial P(x,y,z)}{\partial z} = \frac{\partial R(x,y,z)}{\partial x} = \frac{\partial Q(x,y,z)}{\partial z} = \frac{\partial R(x,y,z)}{\partial y}$$

D'où ω_1 est une <u>forme exacte</u>.

• Considérons $P(x,y,z) = \dfrac{\partial \omega_1(x,y,z)}{\partial x}$

primitive de

$$\frac{-y}{x^2+y^2} = \frac{-\frac{y}{x^2}}{1+\frac{y^2}{x^2}}$$ en divisant terme à terme par x^2

en posant $u(x) = \dfrac{y}{x}$ on a

$$\text{Arctg}\, u(x) = \frac{u'(x)}{1+u^2(x)} = \frac{-\frac{y}{x^2}}{1+\frac{y^2}{x^2}} = \frac{-y}{x^2+y^2}$$

Primitive de

$$\frac{1}{x+y+z} = \left(\ln(x+y+z)\right)'$$

et de $6x = (3x^2)'$

D'où

$$\boxed{\omega_1(x,y,z) = \text{Arctg}\left(\frac{y}{x}\right) + \ln(x+y+z) + 3x^2 + C(y,z)}$$

$$\frac{\partial \omega_1(x,y,z)}{\partial y} = \frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{y^2}{x^2}} + \frac{1}{x+y+z} + \frac{\partial C(y,z)}{\partial y}$$

$$= Q(x,y,z) = \frac{x}{x^2+y^2} + \frac{1}{x+y+z} + 6y$$

$$\Rightarrow \boxed{C(y,z) = \left(3y^2 + K(z)\right)}$$

D'où

$$\omega_1(x,y,z) = \text{Arctg}\left(\frac{y}{x}\right) + \ln(x+y+z) + 3x^2 + 3y^2 + K(z)$$

$$\frac{\partial \omega_1(x,y,z)}{\partial z} = \frac{1}{x+y+z} + \frac{\partial K(z)}{\partial z}$$

$$= R(x,y,z) = \frac{1}{x+y+z}$$

d'où $\dfrac{\partial K(z)}{\partial z} = 0$ et donc $K(z) = k \in \mathbb{R}$.

$$\boxed{\omega_1(x,y,z) = \text{Arctg}\left(\frac{y}{x}\right) + \ln(x+y+z) + 3x^2 + 3y^2 + k}$$

- $\omega_2 = \Big(\underbrace{\frac{x}{x^2+2y^2+z}+z^2}_{P(x,y,z)}\Big)dx + \Big(\underbrace{\frac{2y}{x^2+2y^2+z}}_{Q(x,y,z)}\Big)dy + \Big(\underbrace{\frac{1}{2(x^2+2y^2+z)}}_{R(x,y,z)}+2xz\Big)dz$

- $\dfrac{\partial P(x,y,z)}{\partial y} = \dfrac{-4xy}{(x^2+2y^2+z)^2}$
- $\dfrac{\partial Q(x,y,z)}{\partial x} = \dfrac{-4xy}{(x^2+2y^2+z)^2}$

$=$

- $\dfrac{\partial P(x,y,z)}{\partial z} = -\dfrac{x}{x^2+2y^2+z}+2z$
- $\dfrac{\partial R(x,y,z)}{\partial x} = -\dfrac{\cancel{4}x}{(\cancel{2}x^2+\underset{2}{\cancel{4}}y^2+\cancel{2}z)^2}+2z$

$=$

- $\dfrac{\partial Q(x,y,z)}{\partial z} = \dfrac{-2y}{(x^2+2y^2+z)^2}$
- $\dfrac{\partial R(x,y,z)}{\partial y} = \dfrac{-\overset{2}{\cancel{8}}y}{(\cancel{2}x^2+\underset{2}{\cancel{4}}y^2+\cancel{2}z)^2}$

$=$

C'est bien une forme exacte

Considérons $P(x,y,z) = \dfrac{x}{x^2+2y^2+z}+z^2$

Primitive de $z^2 \to z^2x$

Primitive de $\dfrac{x}{x^2+2y^2+z} \Rightarrow \dfrac{1}{2}\ln(x^2+2y^2+z)$

$= \ln\sqrt{x^2+2y^2+z}$

D'où

$$\boxed{\omega_2(x,y,z) = \ln\sqrt{x^2+2y^2+z}+z^2x+C(y,z)}$$

$$\frac{\partial \omega_2(x,y,z)}{\partial y} = \frac{2y}{x^2+2y^2+z}+\frac{\partial C(y,z)}{\partial y}$$

$$= Q(x,y,z) = \frac{2y}{x^2+2y^2+z}$$

D'où $\dfrac{\partial C(y,z)}{\partial y} = 0 \Rightarrow C(y,z) = K(z)$

$\dfrac{\partial \omega_2(x,y,z)}{\partial z} = \dfrac{1}{2(x^2+2y^2+z)}+2xz+\dfrac{\partial K(z)}{\partial z}$ doit être $=$ à $R(x,y,z)$

$$\Rightarrow \frac{\partial K(z)}{\partial z} = 0 \quad \text{et donc } K(z) = k \in \mathbb{R}$$

D'où

$$\boxed{\omega_2(x,y,z) = \ln\sqrt{x^2+y^2+z^2} + z^2x + k}$$

- $$\omega_3 = \underbrace{\left(\frac{1}{1+x^2}\right)}_{P(x,y,z)}dx + \underbrace{\left(\frac{1}{y^2}+e^{yz}\right)}_{Q(x,y,z)}dy + \underbrace{\left(\frac{1}{z}+e^{zy}\right)}_{R(x,y,z)}dz$$

$$\frac{\partial P(x,y,z)}{\partial y} = 0 = \frac{\partial Q(x,y,z)}{\partial x}$$

$$\frac{\partial P(x,y,z)}{\partial z} = 0 = \frac{\partial R(x,y,z)}{\partial x}$$

$$\boxed{\frac{\partial Q(x,y,z)}{\partial z} = ye^{yz} \neq \frac{\partial R(x,y,z)}{\partial y} = ze^{zy}}$$

Donc ω_3 n'est pas une différentielle.
elle n'est pas exacte.