Corrections des Exercices de type 2 - Semaine 2

Joseph Noailles, Frédéric Messine

1 Exercice 1

Nous avons vu la semaine dernière, cf Exercice 2. fichier Correction_Exercices_type2_Semaine1.pdf que cette fonction n'admettait des limites que quand $\alpha > 1$. Dans ce cas uniquement, f est donc aussi continue en $(0,0)$ par prolongement (car la limite en $(0,0)$ est 0). On en déduit donc que f n'est pas différentiable en $(0,0)$ quand $\alpha \in]0,1]$, car elle n'est même pas continue en ce point.
Le problème de la différentiabilité ne se pose qu'au point $(0,0)$ car partout ailleurs la fonction est bien définie, continue et différentiable par composition d'applications continues et différentiables.

Considérons le cas où $\alpha > 1$; f étant continue en $(0,0)$ par prolongement dans ce cas.
Pour montrer que f est différentiable en $(0,0)$, il suffit de calculer la limite suivante :

$$\lim_{||(h,k)|| \to (0,0)} \epsilon(h,k) = 0$$

avec

$$\epsilon(h,k) = \frac{f(h,k) - f(0,0)}{||(h,k)||} = \frac{f(h,k)}{||(h,k)||}$$

En remarquant que $||(h,k)|| = \sqrt{h^2 + k^2} \geq \sqrt{h^2 - |hk| + k^2}$, d'où l'encadrement suivant :

$$0 \leq \epsilon(h,k) = \frac{f(h,k)}{||(h,k)||} \leq (h^2 - |hk| + k^2)^{\alpha - \frac{3}{2}}$$

On voit que f est différentiable en $(0,0)$ si $\alpha > \frac{3}{2}$, sinon la limite est 1 si $\alpha = \frac{3}{2}$ et $+\infty$ si $\alpha \in]1, \frac{3}{2}[$, donc dans ces cas, on ne peut pas conclure, pour l'instant.
Il faut rechercher des contre-exemples pour montrer que cela ne marche pas quand $\alpha \in]1, \frac{3}{2}]$. Regardons la limite de ϵ quand $h = k$:

$$\epsilon(h,h) = \frac{1}{\sqrt{2}} |h|^{2\alpha - 3}$$

on remarque que si $\alpha = \frac{3}{2}$, $\epsilon(h,h) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ d'où la limite n'est pas 0, de plus si $\alpha \in]1, \frac{3}{2}[$ $\epsilon(h,h) \to +\infty$ quand $h \to 0$.

En conclusion, f n'est différentiable en $(0,0)$ que lorsque $\alpha > \frac{3}{2}$.

2 Exercice 2

On effectue le changement de variable suivant :

$$\begin{cases} u = y + \alpha x \\ v = y + \beta x \end{cases}$$

avec $f(x,y) = F(u,v)$.
Regardons les deux opérateurs dérivée partielles $\frac{\partial}{\partial x}$ et $\frac{\partial}{\partial y}$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial v} = \alpha\frac{\partial F}{\partial u} + \beta\frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial v} = \frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial v} \end{aligned}$$

D'où les opérateurs sont :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \alpha\frac{\partial}{\partial u} + \beta\frac{\partial}{\partial v} \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v} \end{aligned}$$

On calcule ainsi

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \left(\alpha\frac{\partial}{\partial u} + \beta\frac{\partial}{\partial v}\right)\left(\alpha\frac{\partial F}{\partial u} + \beta\frac{\partial F}{\partial v}\right) = \alpha^2\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + 2\alpha\beta\frac{\partial^2 F}{\partial u\partial v} + \beta^2\frac{\partial^2 F}{\partial v^2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial v}\right) = \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 F}{\partial u\partial v} + \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \left(\alpha\frac{\partial}{\partial u} + \beta\frac{\partial}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial v}\right) = \alpha\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + (\alpha+\beta)\frac{\partial^2 F}{\partial u\partial v} + \beta\frac{\partial^2 F}{\partial v^2} \end{aligned}$$

Ainsi, l'équation :

$$a\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + c\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

devient :

$$(a\alpha^2 + b\alpha + c)\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + (2\alpha\beta a + (\alpha+\beta)b + 2c)\frac{\partial^2 F}{\partial u\partial v} + (a\beta^2 + b\beta + c)\frac{\partial^2 F}{\partial v^2} = 0$$

Pour que l'on revienne à l'équation $\frac{\partial^2 F}{\partial u\partial v} = 0$ il faut que les coefficients de $\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}$ et de $\frac{\partial^2 F}{\partial v^2}$ s'annulent, cad : $(a\alpha^2 + b\alpha + c) = 0$ et $(a\beta^2 + b\beta + c) = 0$. Il existe toujours des solutions complexes à l'équation $ax^2 + bx + c = 0$. Il en existe deux réelles distinctes, que l'on notera α et β lorsque le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac > 0$.

En conclusion, lorsque $\Delta = b^2 - 4ac$ sera strictement positif, il existera deux valeurs réelles $\alpha \neq \beta$ solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ telles que le changement de variable ramène à l'équation $\dfrac{\partial^2 F}{\partial u\partial v} = 0$.