Corrections des Exercices de type 1 - Semaine 3

Joseph Noailles, Frédéric Messine

1 Exercice FPVINP-09

La fonction f admet des dérivées partielles premières et secondes en tout point (x, y) de $I\!R^2$ (les applications $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ étant continues sur $I\!R^2$, la fonction f est deux fois différentiable sur $I\!R^2$: :

$$\begin{array}{lll} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x + y - 2 & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2 & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y + x - 2 & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2 & \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2x + y = 2 \\ x + 2y = 2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{2}{3} \\ y = \frac{2}{3} \end{array} \right.$$

Il existe donc un seul point stationnaire $\left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{3}\right)$. On étudie alors le comportement de f au voisinage du point $\left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{3}\right)$; la fonction f étant une fonction quadratique, elle coïncide avec son développement au second ordre pris au voisinage de n'importe quel point (x, y) de $I\!R^2$, en particulier au voisinage de $\left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{3}\right)$.

$$f(x,y) = f\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)(x - \frac{2}{3})(y - \frac{2}{3}) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)(y - \frac{2}{3})^2$$

avec les notations du cours, on a donc : $r = 2, s = 1, t = 2$; donc $\Delta' = s^2 - rt = -3 < 0$. Comme $r > 0$ le point $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{3}\right)$ est un minimum local. C'est même le minimum absolu unique ; car

$$\forall (x,y) \neq \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) f(x,y) - f\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = 2(x - \frac{2}{3})^2 + 2(x - \frac{2}{3})(y - \frac{2}{3}) + 2(y - \frac{2}{3})^2 > 0$$

2 Exercice FPVINP-10

. Mille excuses pour la "coquille" que contenait l'énoncé ; il faalait lire "l'ouvert $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$" et non "l'ouvert $]0, +\infty[\times I\!R$ (c'est un $]0, +\infty[\times]0, +\infty[\rightarrow I\!R$ de mon texte original qui est devenu un $]0, +\infty[\times I\!R$!!!). La fonction f proposée n'est définie que sur l'ouvert $]0, +\infty[\times \left(I\!R \setminus \{(x,y) | x + y = 0 \text{ et } 1 + y = 0\}\right)$.

. L'exercice est analogue au précédent, mais avec une fonction f "plus compliquée", notamment ce n'est pas une fonction quadratique. Son intérêt est double, d'abord il présente un calcul "rapide" des dérivées partielles de f utile dans certains cas, il évite le calcul explicite des dérivées secondes au point stationnaire.

La fonction f est définie, continue sur l'ouvert $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$ (qu'on peut aussi noter $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ ou $(\mathbb{R}_+^*)^2$;le calucl des dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ via la dérivation des applications partielles $x \to f(x,y)$ et $y \to f(x,y)$ s'avérant fastidieux, il est commode d'introduire la fonction g définie par

$$g(x,y) = \ln f(x,y), (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$$

avec $\ln a = \log a$ par notation : logarithme népérien.

Par application du théorème sur la dérivation des fonctions composées, on a :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{f(x,y)}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \text{ et } \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{f(x,y)}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

(on rappelle que $\dfrac{\partial \ln u(t)}{\partial t} = \dfrac{u'(t)}{u(t)}$). Or

$$\begin{aligned} g(x,y) &= \ln f(x,y) = \ln(xy) - \ln((1+x)(1+y)(x+y)) \\ g(x,y) &= \ln x + \ln y - \ln(1+x) - \ln(1+y) - \ln(x+y) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) &= \frac{1}{x} - \frac{1}{1+x} - \frac{1}{x+y} = \frac{y-x^2}{x(1+x)(1+y)} \end{aligned}$$

Soit $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = f(x,y)\dfrac{y-x^2}{x(1+x)(x+y)}$ et par symétrie entre x et y,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = f(x,y)\frac{x-y^2}{y(1+y)(x+y)}$$

On a vu que : $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, x(1+x)(x+y) > 0, y(1+y)(x+y) > 0$ et donc que $f(x,y) > 0$.

Donc, pour $(x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y - x^2 = 0 \\ x - y^2 = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 1 \\ y = 1 \end{array} \right.$$

On doit maintenant étudier f au voisinage du point $(1,1)$, pour cela posons $x = 1+h, y = 1+k$,

$$f(x,y) = f(1+h,1+k) = \frac{(1+h)(1+k)}{(2+h)(2+k)(2+h+k)} = \frac{(1+h)(1+k)}{8(1+\frac{h}{2})(1+\frac{k}{2})(1+\frac{h+k}{2})}$$

en utilisant les développement limités à l'ordre 2 :

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+\frac{h}{2}} &= 1 + \frac{h}{2} - \frac{h^2}{4} + o(h^2) \\ \frac{1}{1+\frac{k}{2}} &= 1 + \frac{k}{2} - \frac{k^2}{4} + o(k^2) \\ \frac{1}{1+\frac{h+k}{2}} &= 1 + \frac{h+k}{2} - \frac{(h+k)^2}{4} + o(h^2+k^2) \end{aligned}$$

On obtient,

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(1+h,1+k) = \frac{1}{8} - \frac{h^2-hk+k^2}{32} + o(h^2+k^2) \\ f(x,y) &= f(1,1) - \frac{h^2-hk+k^2}{32} + o(h^2+k^2) \end{aligned}$$

Or la forme quadratique $(h,k) \to \dfrac{h^2-hk+k^2}{32}$ est définie, positive, donc la forme quadratique $(h,k) \to -\dfrac{h^2-hk+k^2}{32}$ est définie négative, donc le point $(1,1)$ est un maximum local. En fait, le maximum local (ie. point tel que la propriété de maximum est seulement vraie localement) est un maximum absolu (ie. la propriété est vraie sur tout $(I\!R_+^*)^2$, $f(x,y) > f(1,1) = \dfrac{1}{8}$), car ce maximum existe puisque

$$\sup\{f(x,y) | (x,y) \in I\!R_+^* \times I\!R_+^*\} \leq 1 \text{ immédiat.}$$

3 Exercice FPVINP-11

f et g sont des fonctions inconnues mais comme l'ouvert $U = I\!R^2$, sur lequel f et g sont étudiées, est bien simplement connexe (il n'est pas demandé de le démontrer formellement, on peut l'admettre), alors pour que la différentielle $w(x,y,z)$ soit exacte, il suffit de vérifier les hypothèses du théorème de Poincaré :

$$\frac{\partial 2xz}{\partial y} = \frac{\partial(f(y)g(z))}{\partial x} = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial f(y)g(z)}{\partial z} = \frac{\partial(x^2+\frac{y^2}{2})}{\partial y} = y \tag{2}$$

de plus, on vérifie que $\dfrac{\partial 2xz}{\partial z} = 2x = \dfrac{(x^2+y^2/2}{\partial x}$.
L'équation (1) est toujours vérifiée, car f nedépend que de la variable y et g que de la variable x.

L'équation (2) donne :

$$\frac{\partial g(z)}{\partial z} f(y) = y$$

car $\dfrac{\partial f(y)}{\partial z} g(z) = 0$ on en déduit que $f(y) = \dfrac{y}{k}$ et $g(z) = kz$ avec $k \in I\!R^*$.
Ainsi, sous ces conditions $w(x,y,z)$ est bioen une différentielle exacte.

Si on regerde les trois primitives, on a :

$$\begin{aligned} 2xz &= \frac{\partial x^2 z + C_1}{\partial x} \\ yz &= f(y)g(z) = \frac{\partial \frac{y^2}{2} z + C_2}{\partial y} \\ \left(x^2 + \frac{y^2}{2}\right) &= \frac{\partial \left(x^2+\frac{y^2}{2}\right) z + C_3}{\partial z} \end{aligned}$$

Et donc on obtient les primitives de la forme :

$$F(x, y, z) = x^2 z + \frac{y^2}{2} z + C$$

on vérifie bien que

$$dF(x, y, z) = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz = w(x, y, z).$$