Corrections des Exercices de type 1 - Semaine 2

Joseph Noailles, Frédéric Messine

1 Exercice FPVINP-05

. La fonction f est continue au point $(0,0)$.

$$0 \leq f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^2+|y|} \leq \frac{1}{2}\frac{(x^2+y)^2}{x^2+|y|} \leq \frac{1}{2}\frac{(x^2+|y|)^2}{x^2+|y|} = \frac{1}{2}(x^2+|y|), (x,y) \neq (0,0).$$

Or $\frac{1}{2}(x^2+|y|) \to 0, (x,y) \to (0,0)$. Ainsi f est continue au point (0,0).

. $\forall x f(x,0)=0$, donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$. On a aussi, $\forall x f(0,y)=0$, donc $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$.

. Ainsi si f est différentiable en $(0,0)$, sa différentielle en ce point ne peut être que nulle, on doit donc avoir :

$$\begin{cases} f(0+h,0+k) = f(0,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,0).h + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0).k + ||(h,k)||\epsilon(h,k) \\ \text{où } \epsilon(h,k) \to 0, \text{ quand } ||(h,k)|| \to 0 \end{cases}$$

Il faut donc montrer que, $\dfrac{f(h,k)}{||(h,k)||} \to 0$, quand $||(h,k)|| \to 0$, avec $(h,k) \neq (0,0)$.

. Utilisons la norme $||.||_\infty$ définie par $||(h,k)||_\infty = \max\{|h|,|k|\}$, on a :

. pour les points (h,k) tel que $k \geq h > 0$

$$\frac{f(h,k)}{||(h,k)||} = \frac{1}{k}\frac{h^2k}{h^2+k} = \frac{h^2}{h^2+k} \leq \frac{h^2}{k} = \frac{h}{k}.h \geq h$$

.

$$\frac{|f(h,k)|}{||(h,k)||_\infty} = \frac{hk}{h^2+k} \leq \frac{hk}{k} = h$$

dans les cas précédents, on a donc $\dfrac{f(h,k)}{||(h,k)||_\infty} \to 0$, quand $||(h,k)|| \to 0$ avec $(h,k) \neq (0,0)$ pour les deux cas restants, il suffit de remarquer que $f(-h,k) = f(h,k)$ et $f(h,-k) = -f(h,k)$.

Donc f est différentiable au point $(0,0)$ où sa différentielle est nulle, i.e. $df(,0) : (h,k) \to 0$.

2 Exercice FPVINP-06

. La fonction f est continue en $(a,0), a \neq 0$, comme composée d'applications continues en ce point.

. Si $h \neq 0$
$$\frac{f(a+h,0)-f(a,0)}{h} = 0,$$
donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,0) = 0.$
Si $k \neq 0$
$$\frac{f(a,0+k)-f(a,0)}{k} = \frac{a^2}{a^2+|k|} \to 1, k \to 0$$
soit $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,0) = 1.$

. Si f est différentiable au point$(a,0), a \neq 0$ alors sa différentielle en ce point est $df(a,0)$: $(h,k) \to k$.
On doit donc démontrer que
$$\frac{f(a+h,k)-k}{||(h,k)||} \to 0, ||(h,k)|| \to 0.$$
Comme dans l'exercice précedent, on choisit $||.||_\infty$,
. pour les points tels que $|h| \geq |h| > 0$,
$$\frac{f(a+h,k)-k}{||(h,k)||_\infty} = \frac{|k|}{(a+h)^2+|k|} \to 0, ||(h,k)||_\infty \to 0.$$
. pour les points tels que $|h| \geq |k| > 0$
$$\frac{f(a+h,k)-k}{||(h,k)||_\infty} = \frac{|k|^2}{|h|((a+h)^2+|k|)} = \frac{|k|}{|h|}\frac{|k|}{(a+h)^2+|k|} \leq \frac{|k|}{(a+h)^2+|k|}.$$
donc
$$\frac{f(a+h,k)-k}{||(h,k)||_\infty} \to 0, ||(h,k)||_\infty \to 0.$$
Donc, f est différentiable au point $(0,0)$ où sa différentielle est $df(a,0) : (h,k) \to k$.

3 Exercice FPVINP-07

ϕ est une bijection de U sur V, en effet :
$$\left\{\begin{array}{l} x+y=X \\ xy=Y \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x \text{ et } y \text{ sont racines de l'équation :} \\ t^2-Xt+Y=0 \;\; (1) \end{array}\right.$$
Cette équation (1) a deux racines distinctes si et seulement si $X^2-4Y>0$.
Posons :
$$x = \frac{X-\sqrt{X^2-4Y}}{2}, y = \frac{X+\sqrt{X^2-4Y}}{2} \quad (2)$$
Ainsi ϕ est une bijection de U sur V, ie. à tout $(x,y) \in U$, on peut faire correspondre un point et un seul $(X=x+y, Y=xy)$ de V ; réciproquement à tout point $(X,Y) \in V$, on peut faire correspondre un point et un seul de $(x,y) \in U$ grâce à l'équation (2).

Ainsi

$$\phi^{-1}(x,y) = \left(\frac{x-\sqrt{x^2-4y}}{2}, \frac{x+\sqrt{x^2-4y}}{2}\right)$$

La fonction ϕ est de classe C^1 sur U, en effet les deux fonctions $(x,y) \to x+y, (x,y) \to xy$ sont de classe C^1 sur U (on calcule les 4 fonctions dérivées partielles et on montre qu'elles sont continues sur U).

De même, on montre que la fonction ϕ^{-1} est de classe C^1 sur V, en montrant, comme précédemment, que les fonctions $(x,y) \to \frac{x-\sqrt{x^2-4y}}{2}$ et $(x,y) \to \frac{x+\sqrt{x^2-4y}}{2}$ sont de classe C^1 sur V.

Ainsi, ϕ est bien un difféomorphisme de U sur V.

4 Exercice FPVINP-08

Posons $u = (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)^{\frac{1}{2}}$.

Pour $i = 1, 2, \ldots, n$

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_n) = f'(u)\frac{x_i}{u}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2}(x_1, \ldots, x_n) = f'(u)\left(\frac{1}{u} - \frac{x_i^2}{u^3}\right) + f''(u)\frac{x_i^2}{u^2}$$

d'où

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2}(x_1, \ldots, x_n) = f'(u)\left(\frac{n}{u} - \frac{u^2}{u^3}\right) + f''(u)\frac{u^2}{u^2} = \frac{n-1}{u}f'(u) + f''(u)$$

Si

$$g(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\alpha}{(x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{\frac{n-2}{2}}}$$

Alors

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2}(x_1, \ldots, x_n) = 0.$$