Corrections des Exercices de type 1 - Semaine 1

Joseph Noailles, Frédéric Messine

1 Exercice FPVINP-01

Le développement limité en 0 de $\sin x$ est :

$$\sin x \sim_0 x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}).$$

En utilisant le développement à l'ordre 3, on obtient :

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\sin y - y\sin x}{x^2+y^2} &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x(y-\frac{y^3}{6}) - y(x-\frac{x^3}{6})}{x^2+y^2} \\ &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy(x^2-y^2)}{6(x^2+y^2)} \end{aligned}$$

or $\frac{xy(-x^2-y^2)}{6(x^2+y^2)} \leq \frac{xy(x^2-y^2)}{6(x^2+y^2)} \leq \frac{xy(x^2+y^2)}{6(x^2+y^2)}$ et donc, $\frac{-xy}{6} \leq \frac{xy(x^2-y^2)}{6(x^2+y^2)} \leq \frac{xy}{6}$. On bien que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{-xy}{6} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{6} = 0$$

Donc,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\sin y - y\sin x}{x^2+y^2} = 0$$

2 Exercice FPVINP-02

$f(x,y) = \max\{x,y\}$, cette fonction est bien définie partout sur $I\!R^2$.

Quand $x \geq y$, $f(x,y) = x$ et est donc continue. Quand $x \leq y$, $f(x,y) = y$. Il faut regarder ce qu'il se passe quand $x \to y^+$ (par valeur positive) et quand $y \to x^+$.

$$\lim_{x\to y^+} f(x,y) = \lim_{x\to y^+} x = y = \lim_{x\to y^-} f(x,y) = \lim_{x\to y^+} y$$

et

$$\lim_{y\to x^+} f(x,y) = \lim_{y\to x^+} y = x.$$

Donc, quelque soit le point $M_0 = (x,x)$, pour tout point $M = (x,y)$ alors $f(M)$ tend bien vers $f(M_0)$. Donc f est aussi continue sur la droite $y = x$.

3 Exercice FPVINP-03

. $\dfrac{1}{x-y}$ n'est pas définie quand $y = x$ et est définie et continue sur le domaine $D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x \neq y\}$.

. $\dfrac{x+y}{x-y}$ est bien définie et continue sur D_1.

. $\sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}}$ est définie et continue sur D_1 seulement quand $\dfrac{x+y}{x-y} \geq 0$.
Donc si $x \geq y$ alors $x + y \geq 0$ et donc $x \geq -y$, d'où l'on a que $x \geq |y| \geq 0$ et si $x \leq y$ alors $x + y \leq 0$, d'où l'on a que $x \leq -|y| \leq 0$.
On définit les deux domaines suivants : $D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x \geq |y|\}$ et $D_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x \leq -|y|\}$.

f est définie et continue sur le domaine suivant : $D_1 \cap (D_2 \cup D_3)$, cf domaine hachuré sur la figure.

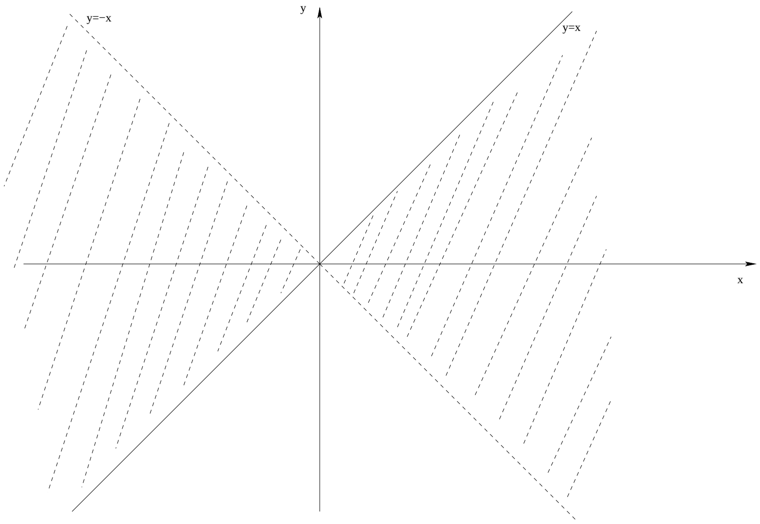

FIG. 1 – Domaine $D_1 \cap (D_2 \cup D_3)$

4 Exercice FPVINP-04

$g(x,y,z) = f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})$, en posant $u(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, on obtient que :

$$\nabla g(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x}(x,y,z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y,z) \times \frac{\partial f}{\partial y}(u(x,y,z)) \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x,y,z) = \frac{\partial u}{\partial y}(x,y,z) \times \frac{\partial f}{\partial u}(u(x,y,z)) \\ \frac{\partial g}{\partial z}(x,y,z) = \frac{\partial u}{\partial z}(x,y,z) \times \frac{\partial f}{\partial u}(u(x,y,z)) \end{pmatrix}$$

d'où

$$\nabla g(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x}(x,y,z) = \frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}} \times f'(\sqrt{x^2+y^2+z^2}) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x,y,z) = \frac{y}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}} \times f'(\sqrt{x^2+y^2+z^2}) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x,y,z) = \frac{z}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}} \times f'(\sqrt{x^2+y^2+z^2}) \end{pmatrix}$$