Corrections des Exercices de type 2 - Semaine 3

Joseph Noailles, Frédéric Messine

1 Exercice 1

$$f(x,y) = (x^2+y^2)e^{x^2-y^2}$$

Les dérivées partielles sont :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x(1+(x^2+y^2))e^{x^2-y^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y(1-(x^2+y^2))e^{x^2-y^2} \end{cases}$$

Comme $e^{x^2-y^2}$ est strictement positif, pour que les dérivées partielles s'annulent, il faut et il suffit de résoudre le sytème non-linéaire suivant :

$$\begin{cases} 2x(1+x^2+y^2) = 0 \ (1) \\ 2y(1-x^2-y^2) = 0 \ (2) \end{cases}$$

On obtient de l'équation (1) que $x = 0$ ou $x^2 + y^2 = -1$ ce qui est impossible dans $\mathbb{R}^2$. Donc, le seul cas possible est $x = 0$ pour vérifier l'équation (1). Si on considère l'équation (2), on obtient que $y = 0$ ou $x^2 + y^2 = 1$. Comme d'après l'équation (1) $x = 0$, on a seulement deux points qui annulent les dérivées partielles : $P_1 = (0,0)$ et $P_2 = (0,1)$.

Si on regarde ce qu'il se passe autour du point $P_1 = (0,0)$, on s'aperçoit que $f(0,0) = 0$ et que partout ailleurs la fonction est strictement positive donc, P_1 est bien le minimum absolu de la fonction f.

Si on regarde ce qu'il se passe autour du point $P_2 = (0,1)$: soit $(h,k)\mathbb{R}^2$ tel que $||(h,k)|| \leq \epsilon$ avec $\epsilon > 0$.

$$f(0+h, 1+k) = (h^2 + (1+k)^2)e^{h^2-(1+k)^2}$$

le développement limité de $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$, on s'arrètera au premier ordre, soit : $e^{h^2+(1+k)^2} = 1 + o(h,k)$ d'où

$$f(h, 1+k) = h^2 + (1+k)^2 + h^4 - (1+k)^4 + (h^2 + (1+k)^2)o(h^2 - (1+k)^2)$$

la fonction $h^2 + (1+k)^2 + h^4 - (1+k)^4$ est bien définie mais n'est ni négative ni positive, donc ce n'est pas un optimum (ni minimum, ni maximum).

2 Exercice 2

Soit w la forme différentielle définie de $]0,+\infty[\times I\!R$ par :

$$w(x,y) = \arctan\frac{y}{x}dx + \ln\sqrt{x^2+y^2}dy$$

Posons $P(x,y) = \arctan\frac{y}{x}$ et $Q(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2}$. D'après le théorème de Poincaré, pour que cette forme différentielle soit exacte, il faut que :

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$$

or,

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial\left(\arctan\frac{y}{x}\right)}{\partial x}(x,y) = \frac{\frac{\partial\frac{y}{x}}{\partial y}}{1+\frac{y^2}{x^2}} = \frac{1}{x}.\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} = \frac{1}{x}.\frac{x^2}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2}$$

et

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial\ln\sqrt{x^2+y^2}}{\partial x} = \frac{1}{2}.\frac{\partial\ln(x^2+y^2)}{\partial x} = \frac{1}{2}.\frac{2x}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2}$$

Donc la condition de Poincaré est bien vérifiée et donc w est bien une différentielle exacte.

Il faut maintenant trouver une primitive, ce qui n'est pas simple dans ce cas. On remarque que :

$$\left(x\arctan\frac{y}{x} + y\ln\sqrt{x^2+y^2}\right)' = \arctan\frac{y}{x}$$

de plus,

$$\left(\frac{y}{2}\ln(x^2+y^2) - y + x\arctan\frac{y}{x}\right)' = \ln\sqrt{x^2+y^2}$$

Donc la primitive générale est :

$$F(x,y) = x\arctan\frac{y}{x} - y + y\ln\sqrt{x^2+y^2} + K$$

où $K \in I\!R$ est une constante quelconque. On vérifie bien que :

$$dF(x,y) = w(x,y), \frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = P(x,y) \text{ et } \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = Q(x,y).$$

3 Exercice 3

$$f(x,y) = x^2y^2(1+x+y)$$

1. Signe de f suivant $M = (x,y)$:

   $$x^2y^2 \geq 0, \forall x, y, \forall M,$$

   Le signe de f est le même que celui de $1+x+y$. Posons $D = \{(x,y)|y = -1-x\}$ l'ensemble des points sur la droite $y = -1-x$. Posons aussi, $E_1 = \{(x,y)|y > -1-x\}$ et $E_2 = \{(x,y)|y < -1-x\}$ les deux demi-espaces séparés par la droite d'équation $y = -1-x$.

   Alors,

. si $M \in E_1$, f est de signe positif,
. si $M \in E_2$, f est de signe négatif,
. si $M \in D$, f est la fonction nulle.

2. Etude des extrema de f :
Les dérivées partielles sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy^2(1+x+y) + x^2y^2 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2x^2y(1+x+y) + x^2y^2 \end{array} \right.$$

Les extrema vérifient le système non-linéare suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} y^2(2x+3x^2+2yx) = 0 \ (1) \\ x^2(2y+2xy+3y^2) = 0 \ (2) \end{array} \right.$$

L'équation (1) nous donne : $y = 0$ ou $2x+3x^2+2yx = 0$, soit $x = 0$ ou $2+3x+2y = 0$ dans ce dernier cas. Posons la droite $D' = \{(x,y) | 2+3x+2y = 0\}$.
L'équation (2) nous donne : $x = 0$ ou $2y+3y^2+2yx = 0$, soit $y = 0$ ou $2+3y+2x = 0$ dans ce dernier cas. Posons la droite $D'' = \{(x,y) | 2+3y+2x = 0\}$.

Tous les extrema sont de la forme :
. $(0,y), \forall y \in I\!\!R$,
. $(x,0), \forall x \in I\!\!R$,
. $D' \cap D'' =$

$$\left\{ \begin{array}{l} y = -1 - \frac{3}{2}x \ (3) \\ y = -\frac{2}{3} - \frac{2}{3}x \ (4) \end{array} \right.$$

$(4)-(3)$ donne $x = -\dfrac{2}{5}$ et $y = -\dfrac{2}{5}$ en remplaçant dans (3) ou dans (4). Doù, on obtient :

$$\left(-\frac{2}{5}, -\frac{2}{5}\right).$$

En conclusion,
. Dans le cas $(0,y), \forall y \in I\!\!R$, si $y > -1$, f admet un minimum local en $(0,y)$, si $y < -1$, f admet un maximum local en $(0,y)$ et si $y = -1$, f n'admet ni minimum ni maximum en $(0,y)$.
. $(x,0), \forall x \in I\!\!R$, mêmes remarques pour $x > -1, x < -1$ et $x = -1$.
. Le point $\left(-\dfrac{2}{5}, -\dfrac{2}{5}\right)$, est un maximum local en ce point.

Aucun des extrema n'est global car $f(x,y)$ n'est pas borné : $f(x,y) \to \pm\infty$, quand $x \to \pm\infty$.