Corrections des Exercices de type 2 - Semaine 1

Joseph Noailles, Frédéric Messine

1 Exercice 1

1.1 Dessin des Boules B_1, B_2, B_∞

– Boule B_1 :

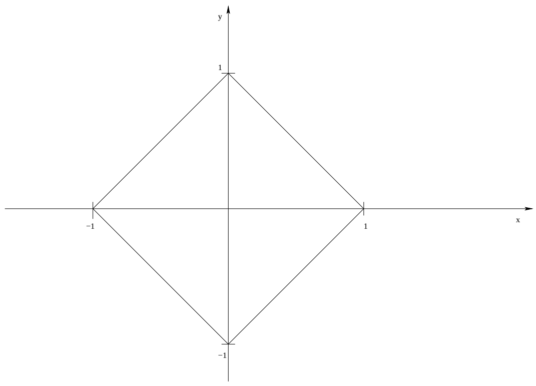

Fig. 1 – Boule B_1

– Boule B_2 :

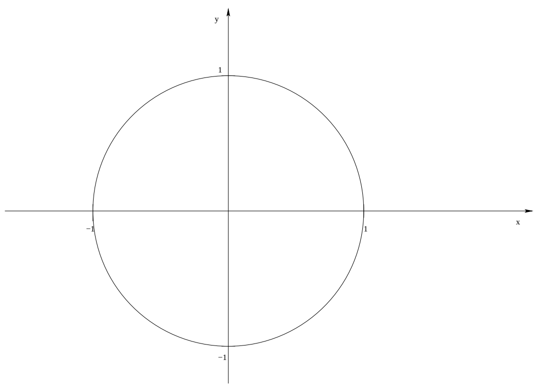

Fig. 2 – Boule B_2

– Boule B_∞ :

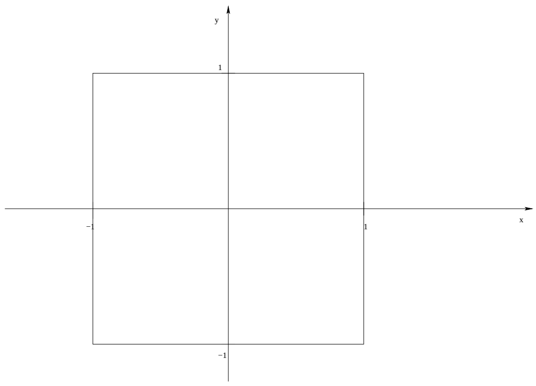

FIG. 3 – Boule B_∞

1.2 Calcul des distances

– Distance d_1 :
$$d_1(M,M') = |1| + |-1| + |1| + |-1| = 4.$$
– Distance d_2 :
$$d_2(M,M') = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2 + (-1)^2} = 2.$$
– Distance d_∞ :
$$d_\infty(M,M') = \max\{|1|, |-1|, |1|, |-1|\} = 1.$$

2 Exercice 2

Rappelons quelques majorations que l'on utilise classiquement, mais qui malheureusement ne sont pas assez "fines" ici (ce qui peut induire en erreur) :

$$\begin{aligned} |x| &\leq k_1\sqrt{x^2+y^2}, \text{ avec } k_1 \geq 1, \\ |y| &\leq k_2\sqrt{x^2+y^2}, \text{ avec } k_2 \geq 1, \end{aligned}$$

D'où
$$|xy| \leq k(x^2+y^2), \text{ avec } k = k_1k_2 \geq 1.$$

Regardons le signe de f_α :

$$x^2 - xy + y^2 \geq x^2 - |xy| + y^2 = (|x| - \frac{1}{2}|y|)^2 + \frac{3}{4}y^2 \geq 0$$

Ce terme est positif et donc $f_\alpha(x,y) \geq 0$. De plus si on regarde $f_\alpha(x,x)$ quand $x \to 0$, on obtient :
$$\lim_{x\to 0} f_\alpha(x,x) = \lim_{x\to 0} \frac{x^{2\alpha}}{x^2} = \lim_{x\to 0} x^{2(\alpha-1)}$$
On remarque que quand $x \to 0$, $x^{2(\alpha-1)}$ tend vers :
. $+\infty$ quand $\alpha < 1$,
. 1 quand $\alpha = 1$,
. 0 quand $\alpha > 1$.

Il faut donc étudier les deux derniers cas, le premier n'ayant pas une limite finie.

. cas où $\alpha = 1$, si on regarde la limite suivante quand $x \to 0$:

$$\lim_{x\to 0} f_\alpha(x, \frac{x}{2}) = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^{2\alpha}}{2^\alpha}}{x^2 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{4}} = \frac{4}{3\times 2^\alpha} x^{2(\alpha-1)} = \frac{2}{3}$$

car $\alpha = 1$. Cette limite est différente de 1. Donc pour l'instant f_α n'a pas de limites en $(0,0)$ quand $\alpha \leq 1$ (donc pas de continuité non plus). Il reste le cas $\alpha > 1$ à regarder.

. cas où $\alpha > 1$, en reprenant les majorations données au dessus, on sait que $f_\alpha(x,y) \geq 0$, et que $x^2 - xy + y^2 \geq x^2 - |xy| + y^2 \geq 0$ donc,

$$0 \leq f_\alpha(x,y) \leq \frac{|xy|^\alpha}{x^2 - |xy| + y^2}$$

Il nous manque encore une majoration pour conclure. En remarquant que l'on a presque $(|x| - |y|)^2$, on en déduit le majorant suivant :

$$(|x| - |y|)^2 = x^2 - 2|xy| + y^2 \geq 0$$

et donc $x^2 - |xy| + y^2 \geq |xy|$, on obtient ainsi que (comme la fonction $|.|^\alpha$ est croissante sur $I\!R^+$ quelque soit α) :

$$0 \leq f_\alpha(x,y) \leq \frac{(x^2 - |xy| + y^2)^\alpha}{x^2 - |xy| + y^2} = (x^2 - |xy| + y^2)^{\alpha-1}.$$

Comme la limite de ce majorant tend bien vers 0 quand (x,y) tend vers $(0,0)$ et que $\alpha > 1$ alors, on a bien que f_α est continue en $(0,0)$ par prolongement -limite de valeur nulle-.

3 Exercice 3

$f(x,y) = \frac{g(x\times y)}{1+y^2}$, on utilisera la dérivation de la division de deux fonctions $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$ avec $u(x,y) = g(xy)$ et $v(x,y) = 1+y^2$, ainsi que la dérivation des fonctions composées pour $u(x,y) = g(xy)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = yg'(xy)$$

On obtient donc :

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y}{1+y^2} \times g'(xy) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{xg'(xy)\times(1+y^2) - g(xy)\times 2y}{(1+y^2)^2} \end{pmatrix}$$