Exercices FPV - Semaine 3

Joseph Noailles, Frédéric Messine

1 Programme de la semaine 3

Ce chapitre porte sur les thèmes suivants:

1. Revoir les formules de Taylor,
2. Recherche des extrema,
3. Formes différentielles.

2 Exercices avec Corrigés

2.1 Exercice 1

Enoncé :

Trouver la borne supérieure sur $K = [0,1] \times [0,1]$ de la fonction f définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} x(1-y^2) \text{ si } x \leq y, \\ y(1-x^2), \text{ si } x > y \end{cases}$$

Correction :

La fonction est continue sur K car les deux expressions définissant f se raccordent sur la première bissectrice. Par contre f n'est pas différentiable aux point (a,a) car

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(a,a)\\ x\leq y}} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 1 - a^2,$$

et

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(a,a)\\ x>y}} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -2a^2.$$

Ces deux limites sont différentes : quand $1 - a^2 = -2a^2$, soit quand $a^2 = -1$, cad $a = i$, qui n'est déjà pas un réel et qui n'appartient donc pas à K. De toute façon il fallait juste montrer qu'il existait un point pour lequel f n'est pas continue, par exemple $(0,0)$, suffisait.

On remarque que f est poitive sur K et s'annule au bord de K.

Comme $f(x,y) = f(y,x)$, on étudie f sur le triangle supérieur

$$K_1 = \{(x,y)/0 \leq x \leq y \leq 1\}$$

On trouve un point stationnaire $(0,1)$ qui correspond à un minimum de f sur K puisque f s'annule en ce point. Comme f s'annule sur les bords de K, le maximum de f est atteint en un point stationnaire de la première bissectrice. On étudie la fonction g définie par

$$g(x) = f(x,x).$$

L'étude de g montre qu'elle atteint son maximum en $\frac{\sqrt{3}}{3}$, doù :

$$\sup_{(x,y)\in K} f(x,y) = g(\frac{\sqrt{3}}{3}) = f(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}) = \frac{2\sqrt{3}}{9}.$$

2.2 Exercice 2

Enoncé :

Montrer que la recherche des extrema de la fonction f définie par

$$f(x,y,z) = xyz$$

sur la partie de $\mathbb{R}^3$ définie par les équations $x + y + z = 5$ et $xy + yz + zx = 8$, revient à rechercher les extrema de la fonction g définie par

$$g(x,y,z) = z^3 - 5z^2 + 8z$$

sur $[1,\frac{7}{3}]$.

En déduire, ces extrema.

Correction :

Résolvons d'abord le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{l} x+y=5-z \\ z(x+y)+xy=8 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y=5-z \\ xy=8-z(5-z)=z^2-5z+8 \end{array}\right.$$

d'où $f(x,y,z)=xyz$ se ramène à étudier $g(z)=z^3-5z^2+8z$ en considérant les contraintes $x+y+z=5$ et $xy+yz+zx=8$.

A partir de valeurs pour z on ne pourra recalculer x et y si et seulement si, soient la somme $S=x+y=5-z$ et le produit $P=xy=z^2-5z+8$ alors X^2-SX+P admet des racines réelles, cad si et seulement si

$$\Delta=(5-z)^2-4(z^2-5z+8)=-3z^2+10z-7\geq 0$$

Donc si $z\in[1,\frac{7}{3}]$.

L'étude de la fonction g sur $[1,\frac{7}{3}]$ donne : $g'(x)=3z^2-10z+8$. g' s'annule sur $[1,\frac{7}{3}]$ en 2 et $\frac{4}{3}$. L'étude du signe de g' donne $g'(x)>0$ sur $[1,\frac{4}{3}[$, puis strictement négatif sur $]\frac{4}{3},2[$ puis à nouveau strictement positif de $]2,\frac{7}{3}[$.

On a donc un maximum en $\frac{4}{3}$ et en aussi en butée de l'intervalle étudié $\frac{7}{3}$. Ceci implique que pour f, on a les valeurs maximales en les points :

$$M_1=\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3},\frac{7}{3}\right),M_2=\left(\frac{7}{3},\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right),M_3=\left(\frac{4}{3},\frac{7}{3},\frac{4}{3}\right).$$

D'où

$$f\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3},\frac{7}{3}\right)=f\left(\frac{4}{3},\frac{7}{3},\frac{4}{3}\right)=f\left(\frac{7}{3},\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right)=g\left(\frac{4}{3}\right)=g\left(\frac{7}{3}\right)=\frac{112}{27}$$

Considérons le minimum ou les minimums :

Le minimum est atteint par g en 2 et aussi sur la butée de l'intervalle d'étude 1, donc pour f en

$$m_1=(2,2,1)\,,m_2=(2,1,2)\,,m_3=(1,2,2)\,.$$

D'où,

$$f(2,2,1)=f(2,1,2)=f(1,2,2)=g(1)=g(2)=4.$$

2.3 Exercice 3

Enoncé :

Déterminer si les formes différentielles suivantes sont exactes :

$$\begin{aligned}
\omega &= ydx - xdy \\
\omega &= ydx + xdy \\
\omega &= xdx + ydy \\
\omega &= 2xydx - x^2dy \\
\omega &= (x+y)^2dx + 2xydy \\
\omega &= (x^2+y^2)dx + 2xydy
\end{aligned}$$

Dans le cas où c'est une forme différentielle exacte, déterminez sa primitive.

Correction :

1. Considérons,
$$\omega = ydx - xdy.$$
Dans tous les exercices, on notera P la première fonction et Q la seconde.
On voit ici que
$$\frac{\partial P}{\partial y} = 1 \text{ et } \frac{\partial Q}{\partial x} = -1$$
ce n'est donc pas une différentielle exacte et donc, il n'existe pas de primitive à cette fonction.
2. Considérons,
$$\omega = ydx + xdy.$$
Ici on voit que c'est une forme différentielle exacte, car
$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 1$$
Et la primitive est directement :
$$f(x,y) = xy + K.$$
3. Considérons,
$$\omega = xdx + ydy$$
Ici on voit que c'est une forme différentielle exacte, car
$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$$
Et la primitive est directement :
$$f(x,y) = x^2 + y^2 + K.$$
4. Considérons,
$$\omega = 2xydx - x^2dy$$
On voit que :
$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2x \text{ et } \frac{\partial Q}{\partial x} = -2x$$
Ce n'est pas une différentielle exacte et il n'y a donc pas de primitive.
5. Considérons,
$$\omega = (x+y)^2dx + 2xydy$$
Dans ce cas,
$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2(x+y) \neq \frac{\partial Q}{\partial x} = 2y.$$
Ce n'est pas une différentielle exacte et il n'y a donc pas de primitive.

6. Considérons,

$$\omega = (x^2 + y^2)dx + 2xydy$$

Dans ce cas, on a bien une différentielle exacte car

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2y = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Il existe donc une primitive.
L'idée est de trouver une primitive à P d'abord en considérant y comme constant :

$$\frac{x^3}{3} + xy^2 + C$$

C dépend de y mais pas forcément de x, appelons la $C(y)$.
Regardons l'équation que l'on a quand y est variable.

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 2xy + C'(y).$$

mais on doit obtenir $Q(x,y) = 2xy$ donc $C'(y) = 0$.
Il vient que la primitive générale de ω est

$$\frac{x^3}{3} + xy^2 + K.$$

2.4 Exercice 4

Enoncé :

Déterminer si les formes différentielles suivantes sont exactes :

$$
\begin{aligned}
\omega &= (3y\cos 3x + 2y^2x)dx + (2x^2y + \sin 3x)dy \\
\omega &= (6xy - y^2)dx + (2xe^y - x^2)dy \\
\omega &= \left(\frac{1}{y} - \frac{z}{x^2}\right)dx + \left(\frac{1}{z} - \frac{x}{y^2}\right)dy + \left(\frac{1}{x} - \frac{y}{z^2}\right)dz
\end{aligned}
$$

Dans le cas où c'est une forme différentielle exacte, déterminez sa primitive.

Correction :

1. Considérons
$$\omega = (3y\cos 3x + 2y^2x)dx + (2x^2y + \sin 3x)dy$$
On pose $P(x,y) = 3y\cos 3x + 2y^2x$ et $Q(x,y) = 2x^2y + \sin 3x$, il vient que
$$\frac{\partial P}{\partial y} = 3\cos 3x + 4xy = \frac{\partial Q}{\partial x}$$
Cette différentielle est donc exacte.
Pour cherche la primitive nous allons intégrer P par rapport à la première variable x : $y\sin 3x + x^2y^2 + C(y)$. Comme l'intégrale a été calculée par rapport à x, il se peut bien que C soit en fait une variable dépendant de y et donc il faut écrire $C(y)$.
On obtient,
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \sin 3x + 2x^2y + C'(y).$$
Or $Q(x,y) = 2x^2y + \sin 3x$ et donc $C(y) = 0$ et il reste une constante pour la forme de la primitive générale.
D'où finalement,
$$f(x,y) = y\sin 3x + x^2y^2 + K.$$
2. Ici on trouve que ce n'est une forme différentielle exacte, car :
$$\frac{\partial P}{\partial y} = 6x - 2y \text{ et } \frac{\partial Q}{\partial x} = 2e^y - 2x$$
Et donc, on ne peut pas trouver de primitive.
3. Considérons :
$$\left(\frac{1}{y} - \frac{z}{x^2}\right)dx + \left(\frac{1}{z} - \frac{x}{y^2}\right)dy + \left(\frac{1}{x} - \frac{y}{z^2}\right)dz$$
C'est bien une différentielle exacte car on a que : on a que :
$$\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{1}{y^2}\\ \frac{\partial P}{\partial z} &= \frac{\partial R}{\partial x} = -\frac{1}{x^2}\\ \frac{\partial Q}{\partial z} &= \frac{\partial R}{\partial y} = -\frac{1}{z^2}\end{aligned}$$
On voit assez facilement que les primitives sont de la forme :
$$f(x,y,z) = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} + K.$$

2.5 Exercice 5

Enoncé :

Déterminer si les formes différentielles suivantes sont exactes :

$$
\begin{aligned}
\omega &= \frac{(x+2y)dx-(2x-y)dy}{x^2+y^2} \\
\omega &= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}dx+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}dy \\
\omega &= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dx+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dy+\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dz
\end{aligned}
$$

Dans le cas où c'est une forme différentielle exacte, déterminez sa primitive.

Correction :

1. Considérons,
$$\omega = \frac{(x+2y)dx - (2x-y)dy}{x^2+y^2}$$
Alors il vient que :
$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{2(x^2-xy-y^2)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$
La différentielle est donc exacte. Pour obtenir sa primitive, on considère que $P(x,y)$ représente la dérivée partielle de f par rapport à x et donc on a
$$f(x,y) = -2\arctan(\frac{y}{x}) + \ln(\sqrt{x^2+y^2}) + C(y)$$
Remark 1 *Pour obtenir ce résultat on scinde la fraction en deux*
$$P(x,y) = \frac{2y}{x^2+y^2} + \frac{x}{x^2+y^2}$$
On peut alors diviser le numérateur et le dénominateur de la première fraction par x^2 *puis faire le changement de variable* $X = \frac{y}{x}$*, on obtient ainsi* $-2\dfrac{dX}{1+X^2}$*, sachant que* $dX = \frac{-y}{x^2}$ *et admet comme primitive* $-2\arctan X$*. Pour la deuxième fraction, on constate que le numérateur est à* $\frac{1}{2}$ *près de la forme* $\frac{u'}{u}$ *dont la primitive générale est* $\ln u$*.*

   $C(y)$ est une fonction qui ne dépend que de y puisque sa dérivée est nulle par rapport à x.
De $\dfrac{\partial f}{\partial x} = -\dfrac{2x-y}{x^2+y^2}$ on en déduit que $C'(y) = 0$ et par conséquent que :
$$f(x,y) = -2\arctan(\frac{y}{x}) + \ln(\sqrt{x^2+y^2}) + C.$$

2. Considérons :
$$\omega = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}dx + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}dy$$
on constate que
$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{-xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$
donc c'est un différentielle exacte.
D'autre part on voit que c'est symétrique par rapport au variable et donc on obtient simplement que
$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} + K.$$

3. Considérons
$$\omega = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dx + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dy + \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dz$$

on a que :

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\
\frac{\partial P}{\partial z} &= \frac{\partial R}{\partial x} = -\frac{xz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\
\frac{\partial Q}{\partial z} &= \frac{\partial R}{\partial y} = -\frac{yz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}
\end{aligned}
$$

C'est donc une forme differentielle exacte.
On voit comme dans l'exercice précédent que les primitives sont de la formes :

$$f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2} + K.$$

3 Exercices avec Aide

3.1 Exercice FPVINP-09

Etudier la nature des points stationnaires de la fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, définie par

$$f(x,y) = x^2 + y^2 + xy - 2x - 2y$$

Aide :

. On vérifiera qu'il existe un seul point stationnaire $a = (a_1,a_2)$.

. Puis vérifier directement que le point a est l'unique maximum absolu de f sur $\mathbb{R}^2$; i.e. $\forall (x,y) \neq (a_1,a_2), f(x,y) > f(a_1,a_2)$.

3.2 Exercice FPVINP-10

Déterminer les extrema de la fonction f définie sur l'ouvert $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$ par

$$f(x,y) = \frac{xy}{(1+x)(1+y)(x+y)}$$

Aide : Même démarche que pour l'exercice précédent.

3.3 Exercice FPVINP-11

Déterminer f et g pour que la forme ω définie par

$$\omega(x,y,z) = 2xzdx + f(y)g(z)dy + (x^2 + \frac{y^2}{2})dz$$

soit exacte, déterminer alors sa primitive.

Aide : On trouvera $\omega = dF$ avec

$$F(x,y,z) = x^2 z + \frac{y^2 z}{2} + \frac{k'}{2k} y^2 + C$$

où $g'(z) = k, f(y) = \frac{y}{k}, k \neq 0$ et C une constante.

4 Exercices à rendre

4.1 Exercice 1

Etudier les extrema de la fontion f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = (x^2 + y^2)e^{(x^2 - y^2)}$$

4.2 Exercice 2

Montrer que la forme différentielle ω définie sur $]0, +\infty[\times \mathbb{R}$ par

$$\omega(x,y) = \mathrm{arctg}\frac{y}{x}dx + \ln\sqrt{x^2 + y^2}dy$$

est exacte, donner alors f tel que $\omega = df$.

4.3 Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = x^2y^2(1 + x + y)$$

1. Etudier, suivant la position du point $M = (x,y)$ dans le plan, le signe de f.
2. Rechercher les extrema locaux de f.