Exercices FPV - Semaine 2

Joseph Noailles, Frédéric Messine

1 Programme de la semaine 2

Le cours porte sur la différentiabilité des fonctions de plusieurs variables, soit :
- Différentiabilité (ou dérivabilité) des fonctions réelles de plusieurs variables réelles (rappel semaine 1).
- Différentiabilité (ou dérivabilité) des fonctions de plusieurs variables réelles à valeurs vectorielles (matrice Jacobienne).
- Opérations sur les différentielles (dérivées), notamment composition d'applications différentiables.
- Difféomorphismes et Jacobiens.
- Dérivées partielles d'ordre supérieur, Formules de Taylor.

2 Exercices avec Corrigés

2.1 Exercice 1

Enoncé :

Soit la fonction f définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^5}{x^6+y^6} \text{ si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, \text{ sinon.} \end{cases}$$

f est-elle de classe C^1 sur $I\!R^2$?

Correction :

En utilisant les majorations suivantes :

$$|x| \leq (x^6+y^6)^{\frac{1}{6}} \text{ et } |y| \leq (x^6+y^6)^{\frac{1}{6}}$$

On obtient que :

$$|f(x,y)| \leq \frac{(x^6+y^6)^{\frac{7}{6}}}{x^6+y^6} = (x^6+y^6)^{\frac{1}{6}}$$

Comme ce majorant est défini en $(0,0)$ et comme il vaut 0, on peut conclure que $f(x,y)$ tend bien vers 0 lorsque (x,y) tend vers $(0,0)$, la fonction est donc continue en $(0,0)$.

$f(x,0) = 0$ et donc, $f'(x,0) = 0$ d'où

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0.$$

Les dérivées premières dans le cas où $(x,y) \neq (0,0)$, sont :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy^5\frac{y^6-2x^6}{(x^6+y^6)^2}$$

Donc,

$$\begin{aligned} |\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)| = \quad & \left|2xy^5\frac{y^6-2x^6}{(x^6+y^6)^2}\right| \leq 2|x||y|^5\frac{y^6+2x^6}{(x^6+y^6)^2} \\ & \leq 2(x^6+y^6)^{\frac{1}{6}}(x^6+y^6)^{\frac{5}{6}}\frac{(x^6+y^6)+2(x^6+y^6)}{(x^6+y^6)^2} = 6. \end{aligned}$$

Cette majoration ne nous permet pas de conclure.
Cela veut peut-être signifier que l'on a un problème avec la continuité de cette dérivée partielle.
Testons donc dans la direction $y = x$, ainsi

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,x) = -\frac{2x^{12}}{4x^{12}} = -\frac{1}{2} \neq 0$$

Ainsi cette différentielle n'est pas continue en $(0,0)$ et donc, f n'est pas de classe C^1 sur tout $\mathbb{R}^2$.

2.2 Exercice 2

Enoncé :

Soit la fonction f définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{\sqrt{x^4+y^2}} \text{ si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, \text{ sinon.} \end{cases}$$

1. Montrez que f est continue en $(0,0)$.
2. Calculez les deux dérivées partielles au point $(0,0)$.
3. Montrez que f n'est pas différentiable en $(0,0)$.

Correction :

D'après les théorèmes sur la composition des fonctions de classe C^1, on a que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

1. En utilisant les majorations suivantes :

$$|x| \leq (x^4 + y^2)^{\frac{1}{4}} \text{ et } |y| \leq (x^4 + y^2)^{\frac{1}{2}}$$

   on a que :

$$|f(x,y)| \leq \frac{(x^4+y^2)^{\frac{3}{4}}}{(x^4+y^2)^{\frac{1}{2}}} = (x^4+y^2)^{\frac{1}{4}}$$

   et donc comme le majorant vaut 0 en $(0,0)$, on en déduit que la limite de f quand (x,y) tend vers $(0,0)$ est bien 0 et coïncide avec la définition. f est bien continue en $(0,0)$ et donc finalement sur tout $\mathbb{R}^2$.

2. En remarquant que :

$$f(x,0) = x \text{ et que } f(0,y) = 0$$

   on obtient directement que :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$$

3. Si la différentielle existait en $(0,0)$ alors $d_{(0,0)}f(h_1,h_2) = h_1$.
   On aurait :

$$\epsilon(h_1,h_2) = \frac{|f(h_1,h_2) - f(0,0) - d_{(0,0)}f(h_1,h_2)|}{||h||_2}$$

   Ici on a pris la norme 2 : $||h||_2$.
   Donc,

$$\epsilon(h_1,h_2) = \frac{\left|\frac{h_1^3}{\sqrt{h_1^4+h_2^2}} - h_1\right|}{||h||_2}$$

   En considérant la direction $h_2 = h_1^2$ on obtient que :

$$\epsilon(h_1,h_1^2) = \frac{\left|\frac{h_1^3}{\sqrt{2}h_1^2} - h_1\right|}{\sqrt{h_1^2+h_1^4}} = \frac{\frac{2-\sqrt{2}}{2}|h_1|}{\sqrt{h_1^2+h_1^4}}$$

   La limite de $\epsilon(h_1,h_1^2)$ quand h_1 tend vers 0 est $\dfrac{2-\sqrt{2}}{2} \neq 0$. Ainsi f n'est pas différentiable en $(0,0)$.

2.3 Exercice 3

Enoncé :

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$. On considère l'inversion de pôle 0 et de puissance 1, $(x,y,z) \to (X,Y,Z)$ par la formule définie par :

$$\begin{cases} X = \frac{x}{x^2+y^2+z^2} \\ Y = \frac{y}{x^2+y^2+z^2} \\ Z = \frac{z}{x^2+y^2+z^2} \end{cases}$$

Déterminez la matrice Jacobienne de cette transformation.

Correction :

Posons $\rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. On a alors que :

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{x}{\rho}; \frac{\partial \rho}{\partial y} = \frac{y}{\rho}; \frac{\partial \rho}{\partial z} = \frac{z}{\rho}.$$

Comme $X = \frac{x}{\rho^2}$, $Y = \frac{y}{\rho^2}$ et $Z = \frac{z}{\rho^2}$, on a que :

$$\begin{array}{rcl} \frac{\partial X}{\partial x} & = & \frac{1}{\rho^2} - \frac{2x^2}{\rho^4}; \frac{\partial X}{\partial y} = -\frac{2xy}{\rho^4}; \frac{\partial X}{\partial z} = -\frac{2xz}{\rho^4} \\ \frac{\partial Y}{\partial x} & = & -\frac{xy}{\rho^4}; \frac{\partial Y}{\partial y} = \frac{1}{\rho^2} - \frac{2y^2}{\rho^4}; \frac{\partial Y}{\partial z} = -\frac{2yz}{\rho^4} \\ \frac{\partial Z}{\partial x} & = & -\frac{xz}{\rho^4}; \frac{\partial Z}{\partial y} = -\frac{2yz}{\rho^4}; \frac{\partial Z}{\partial z} = \frac{1}{\rho^2} - \frac{2z^2}{\rho^4} \end{array}$$

D'où la matrice de la transformation :

$$M = \frac{1}{\rho^4} \begin{pmatrix} y^2+z^2-x^2 & -2xy & -2xz \\ -2xy & z^2+x^2-y^2 & -2yz \\ -2xz & -2yz & x^2+y^2-z^2 \end{pmatrix}$$

2.4 Exercice 4

Enoncé :

L'équation des cordes vibrantes est donnée par :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

où u désigne la déviation par rapport à la position au repos au point d'abscisse x à l'instant t.
Transformez cette équation en passant aux nouvelles variables indépendantes :

$$\alpha = x - vt \text{ et } \beta = x + vt.$$

Correction :

En effectuant le changement de variable donné dans l'énoncé : $\alpha(x,t) = x - vt$ et $\beta(x,t) = x + vt$ comme nouvelles variables de la fonction $u(x,t)$.

Remarque 1 *La fonction u représente l'écart à l'axe des x. Le principe d'une onde est de se propager avec une célérité v. Cela signifie que si au point d'abscisse x et à l'instant t le déplacement est de u_0, à l'instant $t + \Delta t$ au point d'abscisse $x + v\Delta t$ le déplacement est aussi de u_0. Il s'agit d'un simple calcul de substitution.*

On a : $d\alpha = dx - vdt$ et $d\beta = dx + vdt$.
Or par définition,

$$du = \frac{\partial u}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial u}{\partial \beta} d\beta$$

Ainsi, on a que :

$$du = \frac{\partial u}{\partial \alpha}(dx - vdt) + \frac{\partial u}{\partial \beta}(dx + vdt)$$

Or par définition on a aussi que :

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial t} dt$$

d'où

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{\partial u}{\partial \beta} \text{ et } \frac{\partial u}{\partial t} = v\left(\frac{\partial u}{\partial \beta} - \frac{\partial u}{\partial \alpha}\right)$$

par identification. Ce résultat est indépendant de la fonction u et peut donc s'exprimer en terme d'opérateur :

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \alpha} + \frac{\partial}{\partial \beta} \text{ et } \frac{\partial}{\partial t} = v\left(\frac{\partial}{\partial \beta} - \frac{\partial}{\partial \alpha}\right)$$

Ces opérateurs vont nous permettre de calculer les dérivées partielles que l'on substituera dans l'équation donnée.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{\partial u}{\partial \beta}\right) \text{ et } \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(v\frac{\partial u}{\partial \beta} - v\frac{\partial u}{\partial \alpha}\right)$$

Soit :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{\partial u}{\partial \beta}\right) + \frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{\partial u}{\partial \beta}\right)$$

et

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v\frac{\partial}{\partial \beta}\left(v\frac{\partial u}{\partial \beta} - v\frac{\partial u}{\partial \alpha}\right) - v\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(v\frac{\partial u}{\partial \beta} - v\frac{\partial u}{\partial \alpha}\right)$$

On obtient donc (avec v constant) :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2}$$

et

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} - 2v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} + v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2}.$$

En remplaçant dans l'équation de départ :

$$v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

soit

$$v^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} \right) = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} - 2v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} + v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2}.$$

Et donc, l'équation devient :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} = 0$$

2.5 Exercice 5

Enoncé :

Dérivées partielles secondes en coordonnées polaires.
Si $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$ et si l'on pose :

$$F(r,\theta) = f(x,y) = f(r\cos\theta, r\sin\theta).$$

Exprimer : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ à l'aide des dérivées partielles jusqu'à l'ordre 2 de la fonction F par rapport aux variables r, θ.

Correction :

En fait cet exercice permet le calcul des dérivées partielles secondes en coordonnées polaires.

On obtient :

$$\left\{\begin{array}{l} dx = \cos\theta dr - r\sin\theta d\theta \\ dy = \sin\theta dr + r\cos\theta d\theta \end{array}\right.$$

avec

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = \frac{\partial F}{\partial r}dr + \frac{\partial F}{\partial \theta}d\theta$$

En remplaçant dx et dy dans la deuxième égalité, on obtient :

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(\cos\theta dr - r\sin\theta d\theta\right) + \frac{\partial f}{\partial y}\left(\sin\theta dr + r\cos\theta d\theta\right) = \frac{\partial F}{\partial r}dr + \frac{\partial F}{\partial \theta}d\theta$$

On obtient le système linéaire suivant, où les inconnues sont $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$:

$$\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial r} \qquad (1)$$

$$-r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x} + r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial \theta} \qquad (2)$$

A partir de l'équation (1) on obtient :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\frac{\partial F}{\partial r} - \sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}}{\cos\theta} \qquad (3)$$

En remplaçant dans l'équation (2), il vient :

$$-r\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\frac{\partial F}{\partial r} + \left(r\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} + r\cos\theta\right)\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial \theta}$$

d'où

$$\frac{r(\sin^2\theta + \cos^2\theta)}{\cos\theta}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial \theta} + r\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\frac{\partial F}{\partial r}$$

et donc,

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \sin\theta\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial F}{\partial \theta}$$

Il ne reste plus qu'à remplacer cette valeur de $\frac{\partial f}{\partial y}$ dans l'équation (3) pour trouver la solution du système linéaire définit par les deux équations (1) et (2), soit :

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x} = \cos\theta\frac{\partial F}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial F}{\partial \theta} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \sin\theta\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial F}{\partial \theta} \end{array}\right.$$

On a donc les opérateurs suivants :

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x} = \cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{\partial}{\partial y} = \sin\theta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} \end{array}\right.$$

Ainsi :
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\left(\cos\theta\frac{\partial F}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial F}{\partial\theta}\right)$$
$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\cos\theta\frac{\partial F}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial F}{\partial\theta}\right) = \cos\theta\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial^2 F}{\partial r\partial\theta} + \frac{\sin\theta}{r^2}\frac{\partial F}{\partial\theta}$$
et
$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\cos\theta\frac{\partial F}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial F}{\partial\theta}\right) = -\sin\theta\frac{\partial F}{\partial r} + \cos\theta\frac{\partial^2 F}{\partial\theta\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial^2 F}{\partial\theta^2} - \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial F}{\partial\theta}$$
Et finalement, on obtient :
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2\frac{\cos\theta\sin\theta}{r^2}\frac{\partial F}{\partial\theta} + \frac{\sin^2\theta}{r}\frac{\partial F}{\partial r} + \cos^2\theta\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} - 2\frac{\cos\theta\sin\theta}{r}\frac{\partial^2 F}{\partial r\partial\theta} + \frac{\sin^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial\theta^2}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2\frac{\cos\theta\sin\theta}{r^2}\frac{\partial F}{\partial\theta} + \frac{\cos^2\theta}{r}\frac{\partial F}{\partial r} + \sin^2\theta\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + 2\frac{\cos\theta\sin\theta}{r}\frac{\partial^2 F}{\partial r\partial\theta} + \frac{\cos^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial\theta^2}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \cos\theta\sin\theta\left(-\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial\theta^2}\right) + \frac{\cos 2\theta}{r}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial r\partial\theta} - \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial\theta}\right).$$

3 Exercices avec Aide

3.1 Exercice FPVINP-05

Etudier la différentiabilité à l'origine de la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{cases} f(x,y) = \frac{x^2y}{x^2+|y|} \text{ si } (x,y) \neq (0,0), \\ f(0,0) = 0. \end{cases}$$

Aide :
- Etudier la continuité de f au point (0,0) si la fonction n'est pas continue en ce point, elle ne peut pas y être différentiable.
- Si f est continue au point $(0,0)$, étudier l'existence (et les calculer si elles existent) des dérivées partielles
$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$$
(on trouvera $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$).
- Donc si f est différentiable au point $(0,0)$ sa différentielle ne peut être que l'application nulle. Conclure.

3.2 Exercice FPVINP-06

Etudier la différentiabilité de la fonction de l'exercice précédent (FPVINP-05) au point $(a,0), a \neq 0$.

Aide : même démarche que pour l'exercice précédent.

3.3 Exercice FPVINP-07

Montrer que l'application ϕ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $\phi(x,y) = (x+y, xy)$ est un difféomorphisme de $U = \{(x,y)|y > x\}$ sur $V = \{(x,y)|x^2 - 4y > 0\}$.

Aide :
- On admettra que U et Vsont deux ouverts de $\mathbb{R}^2$ pour toute norme sur E, ce qu'on démontrerait comme suit : $f_1 : (x,y) \longrightarrow y - x$ et $f_2 : (x,y) \longrightarrow x^2 - 4y$ sont deux applications continues de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ quelque soit la norme choisie sur $\mathbb{R}^2$ alors $U = f_1^{-1}(]0,+\infty[)$ et $V = f_2^{-1}(]0,+\infty[)$ sont ouverts comme images réciproques par des applications continues d'ouverts de $\mathbb{R}$ (muni de sa topologie canonique).
- Montrer que ϕ est une bijection de U sur V, calculer ϕ^{-1}. Conclure.

3.4 Exercice FPVINP-08

Soit f une fonction numérique de classe C^2 sur $]0,+\infty[$, soit g une application de $\mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}$ définie par $g(x_1,\cdots,x_n) = f(\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}), (x_1,\cdots,x_n) \neq (0, cdots, 0)$.

1. Calculer
$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 g}{\partial x_i^2}(x_1,\cdots,x_n).$$

2. Que dire de cette quantité si

$$g(x_1, \cdots, x_n) = \frac{\alpha}{(x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{\frac{n-2}{2}}}$$

où α est une constante réelle.

Aide : cette quantité est nulle dans ce cas.

4 Exercices à rendre

4.1 Exercice 1

Etudier la différentiabilité de la fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\left\{ \begin{array}{c} f(x,y) = \frac{|xy|^\alpha}{x^2-xy+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0), \\ f(0,0) = 0. \end{array} \right.$$

suivant les valeurs de $\alpha > 0$ (fonction dont on a eu à étudir la continuité la semaine dernière).

4.2 Exercice 2

Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, montrer qu'il existe $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2, \alpha \neq \beta$ tel que le changement de variable

$$\left\{ \begin{array}{l} u = y + \alpha x \\ v = y + \beta x \end{array} \right.$$

transforme l'équation aux dérivées partielles suivantes :

$$a\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + b\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) + c\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0$$

en

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v}(u,v) = 0$$

(sachant que $f(x,y) = F(u(x,y), v(x,y))$).