Exercices FPV - Semaine 1

Joseph Noailles, Frédéric Messine

1 Programme de la semaine 1

Les exercices portent sur les notions de limite, de continuité et sur le calcul des dérivées partielles d'une fonction numérique de $I\!R^n$ (dans $I\!R$).
Il y a 5 exercices corrigés, 4 exercices avec aide et 3 exercices à rendre.

2 Exercices avec Corrigés

2.1 Exercice 1

Enoncé :

Etudier la limite en $(0,0)$ de la fonction suivante qui est définie sur $I\!R^2 \setminus \{(0,0)\}$:

$$f(x,y) = \frac{\sin x - y}{x - \sin y}$$

Correction :

Si l'on s'approche de $(0,0)$ sur la droite d'équation $y = 0$, on a pour tout $x \neq 0$,

$$f(x,0) = \frac{\sin x}{x}$$

Dans ce cas, la limite de $f(x,0)$ est 1 quand x tend vers 0.
Maintenant, prenons la droite $y = x$, on considère donc la fonction :

$$f(x,x) = \frac{\sin x - x}{x - \sin x} = -1$$

Donc évidemment $f(x,x)$ tend vers -1 lorsque x tend vers 0.
On en conclut que la fonction n'a pas de limite en $(0,0)$

2.2 Exercice 2

Enoncé :

Etudiez la continuité sur $\mathbb{R}^3$ de la fonction suivante :

$$f(x,y,z) = \begin{cases} \frac{xy^3z^3}{x^4+y^6+z^8} \text{ si } (x,y,z) \neq (0,0,0), \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Correction :

D'après les théorèmes généraux sur la composition de fonctions continues, cette fonction est continue sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$.
Il reste à regarder si elle est continue en $(0,0,0)$.

En prenant les majorants suivants :

$$\begin{aligned} |x| &\leq (x^4+y^6+z^8)^{\frac{1}{4}} \\ |y| &\leq (x^4+y^6+z^8)^{\frac{1}{6}} \\ |z| &\leq (x^4+y^6+z^8)^{\frac{1}{8}} \end{aligned}$$

On obtient ainsi :

$$|f(x,y,z)| \leq \frac{(x^4+y^6+z^8)^{\frac{1}{4}+\frac{3}{6}+\frac{3}{8}}}{x^4+y^6+z^8} = (x^4+y^6+z^8)^{\frac{1}{4}+\frac{3}{6}+\frac{3}{8}-1} = (x^4+y^6+z^8)^{\frac{1}{8}}$$

La limite de $|f(x,y,z)|$ tend bien vers 0 quand (x,y,z) tend vers $(0,0,0)$. Ainsi, f est bien continue sur tout $\mathbb{R}^3$.

2.3 Exercice 3

Enoncé :

Peut on prolonger au point $(0,0)$ la fonction suivante, qui est définie sur $I\!R^2 \setminus \{(0,0)\}$:

$$f(x,y) = \frac{\sin(xy)}{|x|+|y|}.$$

Calculer les dérivées partielles de f sur $I\!R^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Correction :

En utilisant les majorations suivantes :

$$\begin{aligned} |\sin u| &\leq |u| \\ |x| &\leq |x| + |y| \\ |y| &\leq |x| + |y| \end{aligned}$$

On obtient :

$$|f(x,y)| \leq \frac{|xy|}{|x|+|y|} \leq \frac{(|x|+|y|)^2}{|x|+|y|} \leq |x|+|y|$$

Donc, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} |f(x,y)| = 0$ et l'on prolonge f par continuité en posant : $f(0,0) = 0$.

Les dérivées partielles sont :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y\cos(xy)(|x|+|y|) - \sin(xy)\frac{|x|}{x}}{(|x|+|y|)^2}$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x\cos(xy)(|x|+|y|) - \sin(xy)\frac{|y|}{y}}{(|x|+|y|)^2}$$

2.4 Exercice 4

Enoncé :

Etudier sur $\mathbb{R}^2$ la continuité de la fonction définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^4+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Calculer les dérivées partielles de f sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Correction :

D'après les théorèmes généraux sur la composition des fonctions continues, cette fonction est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
Il reste à étudier la continuité en $(0,0)$.
En utilisant les majorations suivantes :

$$|x| \leq (x^4 + y^2)^{\frac{1}{4}}$$
$$|y| \leq (x^4 + y^2)^{\frac{1}{2}}$$

on obtient :

$$|f(x,y)| \leq \frac{(x^4 + y^2)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}}{x^4 + y^2} = 1$$

Cette méthode que l'on a déjà utilisé souvent ne permet pas de conclure dans ce cas : ce majorant est trop lâche pour la valeur absolue de f.

. Si l'on se rapproche de $(0,0)$ par la droite $y = 0$, on obtient évidemment que $f(x,0) = 0$ et donc que la limite dans cette direction est 0.

. Si l'on se rapproche de $(0,0)$ en considérant la parabole suivante : $y = x^2$, on a que

$$f(x, x^2) = \frac{x^4}{2x^4} = \frac{1}{2}$$

Cette limite vaut donc $\frac{1}{2}$ quand x tend vers 0.

Ainsi nous avons trouvé deux directions différentes par lesquelles les limites ne coïncidaient pas au point $(0,0)$. On en conclut ainsi que f n'est pas continue en ce point.

Les dérivées partielles sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ sont :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2xy(x^4 + y^2) - 4x^5y}{(x^4 + y^2)^2}$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^2(x^4 + y^2) - 2x^2y^2}{(x^4 + y^2)^2} = \frac{x^6 - x^2y^2}{(x^4 + y^2)^2}$$

2.5 Exercice 5

Enoncé :

Etudier sur $I\!R^2$ la continuité de la fonction définie par :

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 \text{ si } |x| \leq y, \\ y^2 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Correction :

Séparons l'espace $\mathbb{R}^2$ en deux sous espaces $U_1 = \{(x, y)/|x| \leq y\}$ et $U_2 = \{(x, y)/|x| > y\}$. D'après les théorèmes généraux sur la continuité des fonctions composées, f est continue sur U_1 et sur U_2 qui sont deux sous ensembles de $\mathbb{R}^2$. Par contre f n'est pas forcément continue à la jonction de ces deux domaines ; cad le cas où $|x| = y$.
Pour tous les points (x', y') étant sur la frontière de U_1 et de U_2, on a que $x' = y'$. Dans ce cas, $f(x', x') = x'^2$ par définition.
Qu'en est il de la limite quand $(x, y) \in U_2$, soit $f(x, y) = y^2$, tend vers (x', x') ?

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x',x') \\ (x,y)\in U_2}} y^2 = x'^2$$

Cette limite coïncide bien avec la valeur de la fonction en (x', x') et ce, quelque soit $x' \in \mathbb{R}$. Cette fonction est donc bien continue sur tout $\mathbb{R}^2$.

3 Exercices avec Aide

3.1 Exercice FPVINP-01

Calculez la limite de
$$\frac{x\sin y - y\sin x}{x^2+y^2}, ((x,y)\neq(0,0))$$
quand (x,y) tend vers $(0,0)$.

Aide : Utiliser le développement de la fonction $\sin x$ au voisinage de 0 à l'ordre 3.

3.2 Exercice FPVINP-02

On considère la fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = max\{x,y\}$ (ie. la valeur de f au point (x,y) de $\mathbb{R}^2$ est égale au plus grand des deux réels x et y), cette fonction est elle continue sur $\mathbb{R}^2$?

Aide : On discutera suivant la position du point (x,y) par rapport à l'ensemble $\{(x,y)|y = x, x\in\mathbb{R}\}$.

3.3 Exercice FPVINP-03

Précisez le domaine de définition et le domaine de continuité de la fonction définie par
$$f(x,y) = \sqrt{\frac{x+y}{x-y}}$$

Aide : Décrire f comme composée d'applications.

3.4 Exercice FPVINP-04

On suppose que f est une fonction dérivable de $]0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$, montrez en les calculant que la fonction $g(x,y,z) = f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})$ admet des dérivées partielles.

Aide : On utilisera la définition de la dérivation de fonctions composées :
$$\frac{\partial f(u(x))}{\partial x_i} = \frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\times\frac{\partial f(u)}{\partial u}$$

Il s'agit d'établir les relations entre les dérivées partielles de g en fonction de la dérivée de f.

4 Exercices à rendre

4.1 Exercice 1

Soient d_1, d_2, d_∞ les trois distances suivantes sur $I\!\!R^n$:

$$\begin{aligned}
d_1(M, M') &= \sum_{i=1}^{n} |x_i - x'_i| \\
d_2(M, M') &= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i - x'_i|^2} \\
d_\infty(M, M') &= \max\{|x_i - x'_i| \; |i = 1, 2, \ldots, n\}
\end{aligned}$$

si $M = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $M' = (x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$.

1. Tracez pour $n = 2$, les boules B_i de centre O et de rayon 1 correspondant à ces différentes distances ($B_i = \{M | d_i(O, M) \leq 1\}, i = 1, 2, \infty$)).

2. Pour $n = 4$, calculez $d_i(M, M')$ pour $i = 1, 2, \infty$ si $M = (1, 0, 1, 0)$ et $M' = (0, 1, 0, 1)$.

4.2 Exercice 2

Peut-on prolonger par continuité au point $(0, 0)$ la fonction f_α définie par :

$$f_\alpha(x, y) = \frac{|xy|^\alpha}{x^2 - xy + y^2}$$

si $(x, y) \neq (0, 0)$. On discutera suivant les valeur du paramètre $\alpha > 0$.

4.3 Exercice 3

Soit g une fonction dérivable de $I\!\!R$ dans $I\!\!R$ et soit f la fonction de $I\!\!R^2$ dans $I\!\!R$, définie par :

$$f(x, y) = \frac{g(x \times y)}{1 + y^2}$$

Montrez que, f admet des dérivées partielles d'ordre 1 que l'on calculera en fonction de la fonction g.