Fonctions de Plusieurs Variables - Examen 2010-2011 : 2h Documents Autorisés

Frédéric Messine

1 Exercice 1 : Continuité et Différentiabilité

Etude de la continuité et de la différentiabilité au point $(0,0)$ des deux fonctions suivantes :

1. Discutez quand $\alpha = 2$ et $\alpha = 4$ de la continuité et de la différentiabilité au point $(0,0)$ de :

$$f_1(x,y) = \begin{cases} \frac{|x|^\alpha y^2}{|x|^3+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

2. Trouvez une condition (la plus générale possible) sur α, β et γ pour que f_2 soit continue et différentiable sur $I\!R^2$:

$$f_2(x,y) = \begin{cases} \frac{|x|^\alpha |y|^\beta}{(x^2+y^2)^\gamma} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Prouvez que la condition donne bien une fonction continue et différentiable.

2 Exercice 2 : Dérivation

Soit g une fonction définie de $I\!R^2$ sur $I\!R^3$ par :

$$g(x,y) = \begin{pmatrix} x^2+3x+4y \\ 4x^2y + e^{xy} \\ x^3 - 5xy \end{pmatrix}$$

et soit f une fonction de $I\!R^3$ dans $I\!R^2$.

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2y + y^2z + xyz \\ xy - yz + x^2y^2z \end{pmatrix}$$

1. Donnez les dérivées premières de f et g.

2. On notera $f(g(x,y)) = f(u,v,w)$, avec $(u,v,w) = g(x,y)$; on remarque que c'est une fonction de $I\!R^2$ dans $I\!R^3$. Caculez la dérivée première de $f(g(x,y))$.

3. Calculez maintenant $g(f(x,y,z))$ et concluez.

3 Exercice 3 : Optimisation

1. Soit la fonction suivante :

$$f(x,y) = 2x^2 + 4xy^2 + 4y^4 + 4x + 1$$

   1. Calculez le gradient de f et déterminez le ou les points stationnaires (si ceux-ci existent).
   2. A l'aide des dérivées secondes, discutez (si cela est possible) pour chacun des points stationnaires si c'est un minimum ou maximum et si il est local ou global ?

2. Soit la fonction suivante :

$$f(x,y) = y^2 + y\ln x, \text{ avec } (x,y) \in [\frac{1}{2}, +\infty[\times I\!R.$$

   1. Calculez le gradient de f et déterminez le ou les points stationnaires (si ceux-ci existent).
   2. A l'aide des dérivées secondes, discutez (si cela est possible) pour chacun des points stationnaires si c'est un minimum ou maximum local et si il est local ou global ?

Remarque 1 *Dans le cas, où l'utilisation des dérivées secondes ne permettrait pas de conclure, essayez intuitivement de dire si les points trouvés sont des minima ou des maxima et si ils sont locaux ou globaux.*

4 Exercice 4 : Formes Différentielles

Soient $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ trois formes différentielles définies comme suit :

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= (4x + xy^2)dx + (x^2y - 1 + y^3)dy \\
\omega_2 &= \left(-y^3 \sin\left(xy^2\right) + 3\,x^2y\right) dx + \left(\cos\left(xy^2\right) - 2\,y^2 \sin\left(xy^2\right) x + x^3\right) dy \\
\omega_3 &= (yz + 6\,xz)dx + (xz + 2\,z^3y)dy + (xy + 3\,x^2 + 3\,z^2y^2)dz
\end{aligned}$$

1. Montrez que ces formes sont ou ne sont pas des différentielles (ou des formes différentielles exactes).

2. Donnez, si cela est possible, les fonctions correspondant à ces trois formes : ω_1, ω_2 et ω_3.