Fonctions de Plusieurs Variables - Examen 2009 : 2h
Documents Autorisés

Frédéric Messine

1 Exercice 1 : Continuité et Différentiabilité

Etude de la continuité et de la différentiabilité au point $(0,0)$ des deux fonctions suivantes :

1. Discutez, en fonction du paramètre α, de la continuité et de la différentiabilité au point $(0,0)$ de :

$$f_1(x,y) = \begin{cases} \frac{x^\alpha y^2}{x^2+|y|^3} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

2. Discutez, en fonction du paramètre α, de la continuité et de la différentiabilité au point $(1,0)$ de :

$$f_2(x,y) = \begin{cases} \frac{|(x-1)y|^\alpha}{(x-1)^2-|(x-1)y|+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (1,0) \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

2 Exercice 2 : Dérivation

Soit ϕ une fonction définie de $I\!R^2$ sur $I\!R^2$ par :

$$\phi(x,y) = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ 3x-y \end{pmatrix}$$

On note $F(\phi(x,y)) = F(u,v) = f(x,y)$.

1. Donnez les opérateurs de dérivation par rapport aux variables x et y en fonction de $\frac{\partial}{\partial u}$ et de $\frac{\partial}{\partial v}$.

2. Calculez les dérivées premières et secondes de f par rapport à aux dérivées de F par rapport à u et v.

3. Appliquez le au cas où $F(u,v) = u^2v^2$.

4. On désire calculer le gradient de F par rapport à u et v en fonction des derivées premières de f par rapport à x et y et ce, sans constuire explicitement $F(u,v)$; cad en calculant $J_\phi(x,y)$ et en l'inversant (on ne tiendra pas compte du résultat de la question 3.).

3 Exercice 3 : Optimisation

1. Soit la fonction suivante :

$$f(x,y) = 2x^2 - xy^2 + 4y^4 + x$$

1. Calculez le gradient de f et déterminer le ou les points stationnaires (si ceux-ci existent).
2. A l'aide des dérivées secondes, discutez pour chacun des points stationnaires si c'est un minimum ou maximum et si il est local ou global ?

2. Soit la fonction suivante :

$$f(x,y) = \cos(x^2 + y^2 - 1)$$

1. Calculez le gradient de f et déterminer le ou les points stationnaires (si ceux-ci existent).
2. A l'aide des dérivées secondes, discutez pour chacun des points stationnaires si c'est un minimum ou maximum local et si il est local ou global ?
3. Dans le cas, où l'utilisation des dérivées secondes ne permettrait pas de conclure, intuitivement et même explicitement, peut-on dire que des points sont des minima ou des maxima et si ceux-ci sont locaux ou globaux.

4 Exercice 4 : Formes Différentielles

Soient $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ trois formes différentielles définies comme suit :

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= x^2 \sin(y)dx + \frac{x^3}{3}\cos(y)dy \\
\omega_2 &= \left(\ln\left(\frac{x^2}{z^2}\right) + \frac{1}{2}y^2\right)dx + xydy - \frac{2x}{z}dz \\
\omega_3 &= \left(-2\sin(x^2)xy\right)dx + \left(y^2 + \cos(x^2)\right)dy
\end{aligned}$$

1. Montrer que ces formes sont ou ne sont pas des différentielles (ou des formes différentielles exactes).

2. Donnez, si possible, les fonctions correspondant à ces trois formes : ω_1, ω_2 et ω_3.