Fonctions de Plusieurs Variables - Examen 2008 : 2h
Documents Autorisés

Frédéric Messine

1 Exercice 1 : Continuité et Différentiabilité

Etude de la continuité et de la différentiabilité au point $(0,0)$ des deux fonctions suivantes :

1. Discutez, en fonction du paramètre α, de la continuité et de la différentiabilité au point $(0,0)$ de :

$$f_1(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2|y|^\alpha}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

2. Discutez, en fonction du paramètre α, de la continuité et de la différentiabilité au point $(0,0)$ de :

$$f_2(x,y) = \begin{cases} \frac{|xy|^\alpha}{4x^2-3|xy|+9y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

2 Exercice 2 : Dérivation

Soit ϕ une fonction définie de $I\!R^2$ sur $I\!R^2$ par :

$$\phi(x,y) = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x + y \\ x + \beta y \end{pmatrix}$$

On note $F(\phi(x,y)) = F(u,v) = f(x,y)$.

1. Donnez les opérateurs de dérivation par rapport aux variables x et y en fonction de $\frac{\partial}{\partial u}$ et de $\frac{\partial}{\partial v}$.

2. Calculez les dérivées première et seconde de f par rapport à aux dérivées de F par rapport à u et v.

3. Déterminez les deux paramètres α et β tel que $\alpha < \beta$ pour que l'équation différentielle :

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0$$

se ramène à

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v}(u,v) = 0.$$

4. On désire calculer le gradient de F par rapport à u et v en fonction des derivées premières de f par rapport à x et y et ce, sans constuire explicitement $F(u, v)$; on gardera dans cette question les termes α et β sans les remplacer par les valeurs trouvées en question 3.

– Calculez $J_\phi(x, y)$ qui représente la matrice Jacobienne de ϕ par rapport à x et y.
– Caculez l'inverse de $J_\phi(x, y)$ (dire pour quelles valeurs de α et β cette inversion est possible), et déduisez-en le gradient de F par rapport à u et v.

3 Exercice 3 : Optimisation

1. Soit la fonction suivante :

$$f(x, y) = x^2 - 2xy^2 + y^4 + 2x$$

1. Calculez le gradient de f et déterminer le ou les points stationnaires (si ceux-ci existent).
2. A l'aide des dérivées secondes, discutez pour chacun des points stationnaires si c'est un minimum ou maximum et si il est local ou global ?

2. Soit la fonction suivante :

$$f(x, y) = cos(x^2 + y^2)$$

1. Calculez le gradient de f et déterminer le ou les points stationnaires (si ceux-ci existent).
2. A l'aide des dérivées secondes, discutez pour chacun des points stationnaires si c'est un minimum ou maximum local et si il est local ou global ?
3. Dans le cas, où l'utilisation des dérivées secondes ne permettrait pas de conclure, intuitivement et même explicitement, peut-on dire que des points sont des minima ou des maxima et si ceux-ci sont locaux ou globaux.

4 Exercice 4 : Formes Différentielles

Soient $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ trois formes différentielles définies comme suit :

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= xyzdx + \frac{x^2 z}{2}dy + \frac{x^2 y}{2}dz \\
\omega_2 &= y^2 \cos(xy^2)\cos y dx + \left(2xy\cos(xy^2)\cos y - \sin(xy^2)\sin y\right) dy \\
\omega_3 &= \ln\left(\frac{x^2}{y^2}\right) dx - \frac{2x}{y}dy
\end{aligned}$$

1. Montrer que ces formes sont ou ne sont pas des différentielles (ou des formes différentielles exactes).

2. Donnez, si possible, les fonctions correspondant à ces trois formes : ω_1, ω_2 et ω_3.