Fonctions de Plusieurs Variables - Examen 2007 : 2h
Documents Autorisés

Frédéric Messine

1 Exercice 1 : Continuité et Différentiabilité

Etude de la continuité et de la différentiabilité en certains points des fonctions suivantes :

1. Discutez, en fonction du paramètre α, de la continuité et de la différentiabilité sur $I\!R^2$ de :

$$f_1(x,y) = \begin{cases} \frac{|xy|^\alpha}{x^2+xy+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

2. Discutez, en fonction du paramètre α, de la continuité et de la différentiabilité sur $I\!R^2$ de :

$$f_2(x,y) = \begin{cases} \frac{(x-1)^2(y+1)^\alpha}{\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^4}} + 1 \text{ si } (x,y) \neq (1,-1) \\ 1 \text{ sinon.} \end{cases}$$

3. Discutez de la continuité et de la différentiabilité au point $(0,0)$ de :

$$f_3(x,y) = \begin{cases} 1 \text{ si } (x,y) \in \mathcal{C} \setminus \{(0,0)\} \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

où $\mathcal{C} = \{(x,y), \text{ tel que } x+y=0\}$. $\mathcal{C} \setminus \{(0,0)\}$ veut dire l'ensemble $\mathcal{C}$ privé de l'élément $(0,0)$.

2 Exercice 2 : Dérivation

Soit ϕ une fonction définie de $I\!R^3$ sur $I\!R^2$ par :

$$\phi(x,y,z) = \begin{pmatrix} 3x^2 - \ln(xy) + \cos\left(\frac{x}{z}\right) \\ \sqrt{x^2+y} - \sin(x^2 z) \end{pmatrix}$$

Et soit f la fonction définie de $I\!R^2$ dans $I\!R$ suivante :

$$f(u,v) = u^2 v - \ln v$$

1. Calculez la dérivée première de ϕ par rapport à x, y et z.

2. Calculez les dérivées première et seconde de f par rapport à u et v.

3. Calculez la dérivée première de $F(x,y,z) = f(\phi(x,y,z))$. Calculez la dérivée seconde de F par rapport à x, y et z.

3 Exercice 3 : Optimisation

Soit la fonction suivante, définie sur tout $\mathbb{R}^2$:

$$f(x,y) = \frac{1}{2}x^4 + x^2 - 2x^2y + \frac{2}{3}y^3 + 1$$

1. Existe-t'il une direction vers laquelle cette fonction f tend vers $+\infty$ et une autre vers $-\infty$; donnez les deux directions que vous avez trouvées, le cas échéant. Que peut-on en conclure ?

2. Calculez les dérivées partielles et donnez les points stationnaires de f.

3. Discutez pour chacun des points stationnaires si c'est un minimum ou maximum local ?

4 Exercice 4 : Formes Différentielles

Soient $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ trois formes différentielles définies comme suit :

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= \left(x^2 + 2xy\right) dx + \left(x^2 + \frac{1}{y}\right) dy \\
\omega_2 &= (4xy + \ln y)\, dx + \left(2x^2 + \frac{x}{y}\right) dy + e^z dz \\
\omega_3 &= \left(-\frac{y^2 z}{2x^3}\right) dx + \left(\frac{yz}{x^2}\right) dy + \left(\frac{yz}{x^2}\right) dz
\end{aligned}$$

1. Montrer que ces formes sont ou ne sont pas des différentielles (ou des formes différentielles exactes).

2. Donnez, le cas échéant, les fonctions correspondant aux trois premières formes : ω_1, ω_2 et ω_3.