Fonctions de Plusieurs Variables - Examen : 2h
Documents Autorisés

Frédéric Messine

1 Exercice 1 : Continuité et Différentiabilité

Etude de la continuité et de la différentiabilité en certains points des fonctions suivantes :

1. Discutez, en fonction du paramètre α, de la continuité et de la différentiabilité sur $\mathbb{R}^2$ de :

$$f_1(x,y,z) = \begin{cases} \frac{|xyz|^\alpha}{\sqrt{x^2+y^4+z^6}} \text{ si } (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

2. Discutez, en fonction du paramètre α, de la continuité et de la différentiabilité sur $\mathbb{R}^2$ de :

$$f_2(x,y) = \begin{cases} \frac{(x-1)^\alpha (y+1)^2}{\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2}} + 1 \text{ si } (x,y) \neq (1,-1) \\ 1 \text{ sinon.} \end{cases}$$

3. Discutez de la continuité et de la différentiabilité au point $(0,0)$ de :

$$f_3(x,y) = \begin{cases} 1 \text{ si } (x,y) \in \mathcal{C} \setminus \{(0,0)\} \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

où $\mathcal{C} = \{(x,y), \text{ tel que } x^2+(y-1)^2 = 1\}$. $\mathcal{C} \setminus \{(0,0)\}$ veut dire l'ensemble $\mathcal{C}$ privé de l'élément $(0,0)$.

4. Discutez de la continuité et de la différentiabilité au point $(0,0)$ de :

$$f_4(x,y) = \begin{cases} x^2+y^2 \text{ si } (x,y) \in \mathcal{C} \setminus \{(0,0)\} \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

où $\mathcal{C} = \{(x,y), \text{ tel que } x^2+(y-1)^2 = 1\}$.
Que pouvez vous dire de la continuité de f_4 sur tout $\mathbb{R}^2$.

2 Exercice 2 : Dérivation

Soit f une fonction définie de $\mathbb{R}^3$ sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x,y) = 2x^2 + 3y^2 + xy - z^2 + 1,$$

Et soit ϕ la fonction définie de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ permettant de passer des coordonnées polaires aux coordonnées cartésiennes :

$$\phi(r,\theta,z) = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \\ z \end{pmatrix}$$

1. Calculez les dérivées première et seconde de f ; i.e. le gradient et sa matrice hessienne.

2. Calculez les dérivées première et seconde de $F(r,\theta,z) = f(\phi(r,\theta,z))$; i.e. le gradient et sa matrice hessienne.

3. Si vous ne l'avez pas fait en 2., calculez la matrice Jacobienne J_ϕ $\nabla f(\phi(r,\theta,z))^T.J_\phi(r,\theta,z)$. Concluez.

3 Exercice 3 : Optimisation

Pour toutes les fonctions suivantes, calculez leurs dérivées et discutez sur le ou les points optimaux (cad ou le gradient s'annule) :

1. $f(x,y) = -x^2 - 2x - y^2 + 1$, avec $(x,y) \in I\!R^2$.

2. $f(x,y) = 2x_1^3 - 3x_1^2 + 6x_1x_2^2 + 6x_1x_2$, avec $(x,y) \in I\!R^2$.

3. $f(x,y,z) = x^2 + 3y^2 + z^2 - 3xy + 2xy - y - 4$, avec $(x,y,z) \in I\!R^3$.
Dans ce cas, on effectuera le calcul de $f(P + (h,k,t))$ (où P est un extremum) et on regardera si les termes linéaires en h, k et t s'annulent et on donnera le terme quadratique dont il faudra étudier le signe. Concluez (même intuitivement) sur les extrema trouvés.

4 Exercice 4 : Formes Différentielles

Rappel : $(arctg(u(x)))' = \frac{u'(x)}{1+(u(x))^2}$.

Soient $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ trois formes différentielles définies comme suit :

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= \left(\frac{-y}{x^2+y^2} + \frac{1}{x+y+z} + 6x\right)dx + \left(\frac{x}{x^2+y^2} + \frac{1}{x+y+z} + 6y\right)dy + \frac{1}{x+y+z}dz \\
\omega_2 &= \left(\frac{x}{x^2+2y^2+z} + z^2\right)dx + \frac{2y}{x^2+2y^2+z}dy + \left(\frac{1}{2(x^2+2y^2+z)} + 2xz\right)dz \\
\omega_3 &= \left(\frac{1}{1+x^2}\right)dx + \left(\frac{1}{y^2} + e^{yz}\right)dy + \left(\frac{1}{z} + e^{zy}\right)dz
\end{aligned}$$

1. Montrer que ces formes sont ou ne sont pas des différentielles (ou des formes différentielles exactes).

2. Donnez, le cas échéant, les fonctions correspondant aux trois premières formes : ω_1, ω_2 et ω_3.