Fonctions de Plusieurs Variables - Examen 2005 - 2h

Frédéric Messine

1 Exercice 1 : Continuité et Différentiabilité

Les fonctions suivantes sont elles continues et différentiables en tout point de $I\!R^2$:

$$
\begin{aligned}
f_1(x,y) &= \begin{cases} \frac{x^2|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases} \\
f_2(x,y) &= \begin{cases} \frac{(x-2)^3(y+2)^2}{\sqrt{(x-2)^2+(y+2)^2}} + 1 \text{ si } (x,y) \neq (2,-2) \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases} \\
f_3(x,y) &= \begin{cases} \frac{|x|^\alpha |y|^\beta}{(x^2+y^2)^\gamma} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Pour f_3, trouvez les conditions que doivent vérifier α, β et γ pour que la fonction f_3 soit continue et différentiable en tout point de $I\!R^2$.

2 Exercice 2 : Dérivation

Soient trois fonctionnelles différentiables u, v et f définies de $I\!R^2$ dans $I\!R$.

1. Montrez que la fonctionnelle g définie de $I\!R^2$ dans $I\!R$ par

$$g(x,y) = f(u(x,y), v(x,y))$$

est différentiable sur $I\!R^2$; (attention (x,y) est dans $I\!R^2$).

2. Donnez l'expression des dérivées partielles de g en fonction des dérivées partielles de u, v et de f.
Attention, on effectue en fait un changement de variables, en posant $u = u(x,y)$ et $v = v(x,y)$, on dérivera f par u et par v.

3. Appliquez ce résultat au changement de variables classique des coordonnées cartésiennes en coordonnées polaires : $x = \rho \cos\theta$ et $y = \rho\cos\theta$; attention dans cette nouvelle écriture u est en fait x et v joue le rôle de y en question 2.

4. Donnez la matrice Hessienne (dérivée seconde) de g en fonction des dérivées partielles secondes de u, v et f.

3 Exercice 3 : Optimisation

Pour toutes les fonctions suivantes, calculez leurs dérivées et discutez sur le ou les points optimaux (cad ou le gradient s'annule) :

1. $f(x,y) = x^2 - 2x + y^2 + 3y - 1$, avec $(x,y) \in I\!R^2$.

2. $f(x,y) = x^2 - 2xy + y^2 - 3x + 1$, avec $(x,y) \in I\!R^2$.

3. $f(x,y) = (2x^2 - 4x + 1)e^{x^3-3x^2+y^3-5y^2+5y+1}$, avec $(x,y) \in I\!R^2$.

4. $f(x,y) = x^2 + x\ln y$, avec $(x,y) \in I\!R \times [\frac{1}{2}, +\infty[$.

4 Exercice 4 : Formes Différentielles

Rappel : $(arctg(u(x)))' = \frac{u'(x)}{1+(u(x))^2}$.
Soient $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, et ω_4, quatre formes différentielles définies comme suit :

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= \left(y^2\right) dx + \left(2xy - y^2\right) dy \\
\omega_2 &= \left(x^2 + \frac{xy}{2}\right) dx + \left(\frac{x^2}{4} + y^2\right) dy \\
\omega_3 &= (ln(xyz) + 1)\, dx + (arctg(y) + \ln(xyz) + 1)\, dy + \left(arctg(xy) + \frac{x}{y} + z^2\right) dz \\
\omega_4 &= \left(\frac{1}{x} + \frac{e^{xy}}{x}\right) dx + \left(\frac{1}{y^2} + \frac{e^{xy}}{y}\right) dy + \left(\frac{1}{1+z^2}\right) dz
\end{aligned}$$

1. Montrer que ces formes sont ou ne sont pas des différentielles (ou des formes différentielles exactes).

2. Donnez, le cas échéant, les fonctions correspondantes.