Fonctions de Plusieurs Variables - Examen : 1h30 (2h)

Frédéric Messine

1 Exercice 1 : Continuité et Différentiabilité

Les fonctions suivantes sont elles continues et différentiables en tout point de $I\!R^2$:

$$
\begin{aligned}
f_1(x,y) &= \begin{cases} \frac{|xy|}{x^2+y^2-|xy|} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases} \\
f_2(x,y) &= \begin{cases} \frac{(xy)^2}{x^2+y^2-|xy|} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases} \\
f_3(x,y) &= \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2} + 1 \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 \text{ sinon.} \end{cases} \\
f_4(x,y) &= \begin{cases} \frac{x^3y^2-y^2-3x^2y^2+3xy^2}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}
\end{aligned}
$$

2 Exercice 2 : Dérivation

Soient f et ϕ, deux fonctions définies de $I\!R^3$ sur $I\!R$ pour f et de $I\!R^2$ sur $I\!R^3$ pour ϕ.

$$
\begin{aligned}
\phi(x_1,x_2) &= (x_1^2, x_2^2, 2x_1x_2) \\
f(x_1,x_2,x_3) &= \sqrt{x_1+x_2+x_3}
\end{aligned}
$$

1. Calculez les dérivées premières de f, de ϕ et de $fo\phi$.

2. Calculez les dérivées secondes de f, et de $fo\phi$.

3 Exercice 3 : Optimisation

Rappel :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\in I\!R}} x\ln x = 0.$$

Soit la fonction f définie comme suit :

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\ln(x^2+y^2), \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

1. f est elle continue en $(0,0)$?

2. f est elle différentiable en $(0,0)$?

3. Calculez la dérivée première de f ? Etudiez les points ou cette dérivée s'annule.

4. Caractérisez le point $(0,0)$ (extremum ? minimum ? ou maximum ?)

5. Que peut on dire des autres points ou le gradient s'annule (au moins de manière intuitive).

4 Exercice 4 : Formes Différentielles

Rappel : $(arctg(u(x)))' = \frac{u'(x)}{1+(u(x))^2}$.

Soient $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, et ω_4, quatre formes différentielles définies comme suit :

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= \left(x^2+xy\right)dx + \left(\frac{x}{2}+y^2\right)dy \\
\omega_2 &= \left(arctg(xy)+\ln(xyz)+1\right)dx + \left(arctg(xy)+\frac{x}{y}+z^2\right)dy + \left(ln(xyz)+1\right)dz \\
\omega_3 &= \left(\frac{1}{x}+e^{xy}\right)dx + \left(\frac{1}{y^2}+e^{xy}\right)dy + \left(\frac{1}{1+z^2}\right)dz \\
\omega_4 &= \left(\ln(x^2-1)+y^2\right)dx + \left(2xy-y^2\right)dy
\end{aligned}$$

1. Montrer que ces formes sont ou ne sont pas des différentielles (ou des formes différentielles exactes).

2. Donnez, le cas échéant, les fonctions correspondant aux trois premières formes : ω_1, ω_2 et ω_3, (pas ω_4).

3. Considérons ω_4, que peut-on dire du point $(\sqrt{2},0)$ (extremum ? minimum ? ou maximum ?). Prouvez votre raisonnement sans pour autant calculer la fonction correspondant à cette différentielle, puis concluez.