Cours FPV - Semaine 4 : Fonctions Implicites

Joseph Noailles, Frédéric Messine

1 Organisation de la quatrième semaine

. Ce cours a trait à un théorème important : le théorème des fonctions implicites. Ce théorème, jugé assez difficile lorsqu'on le rencontre la première fois requiert beaucoup d'attention dans la compréhension de son énnoncé.
. Deux exercices avec corrigés et deux exercices, avec deux questions chacun, avec aide sont proposés.
. Ce dernier cours est assez court, ce qui vous permettra de passer une partie de la semaine à vos révisions sur les trois premiers chapitres :

1. Reprendre, d'abord sans l'aide des corrigés, les exercices qui vous ont été donnés.
2. Bien préparer la scéance du vendredi matin sur les parties du cours posant problèmes.

2 Fonctions Implicites

On est habitué aux fonctions définies **explicitement** par $x \to f(x)$, par exemple :

$$\begin{cases} \text{la fonction } x \to x^2 \text{ de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R}, \\ \text{la fonction } (x_1, x_2) \to \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \text{ de } \mathbb{R}^2 \text{ dans } \mathbb{R}, \\ \text{la fonction } (x_1, x_2) \to (e^{x_1+x_2}, \sin(x_1x_2)) \text{ de } \mathbb{R}^2 \text{ dans } \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

Il existe une autre manière, **IMPLICTE** celle là de définir la dépendance de variables d'autres variables à l'aide d'une équation les faisant intervenir. Par exemple, si $f(x, y) = 0$ est l'équation $x^2 + y^2 - 1 = 0$ faisant intervenir les deux variables scalaires x et y, il est possible, **sous certaines conditions et localement**, de définir "y en fonction de x" comme on le verra après le théorème des fonctions implicites.

Ce théorème repose sur le théorème, dit d'**inversion locale**, qui présente un intérêt en tant que tel.

Theorème 1 (Théorème d'Inversion Locale) *Si*
. *U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$,*
. *$f : (x_1, \ldots, x_n) \to (f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_n))$ est une application de classe C^1 sur U et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$,*
. *a est un point de U tel qu'en ce point la matrice $Df(a) = \left[\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right]_{i=1,\ldots,n;j=1,\ldots,n}$*

Alors
. *il existe un ouvert U_1 de $\mathbb{R}^n$, contenu dans U, contenant le point a et un ouvert V de $\mathbb{R}^n$ contenant le point $b = f(a)$ tels que f soit une* **bijection** *de U sur V,*

. *l'***application réciproque** *de f, notée g, définie sur V par*

$$\forall x \in U, g(f(x)) = x$$

est de **classe** C^1 *sur V,*
. *la matrice $Dg(y)$ pour $y \in V$ est telle que :*

$$Dg(y) = [Df(g(y))]^{-1}$$

où

$$Dg(y) = \left[\frac{\partial g_i}{\partial y_j}(y)\right]_{i=1,\ldots,n;j=1,\ldots,n}$$
$$Df(g(y)) = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(g(y))\right]_{i=1,\ldots,n;j=1,\ldots,n}$$

Ce sont des matrices $n \times n$.

Brièvement, ce théorème dit qu'une fonction de classe C^1 au voisinage d'un point est localement inversible si sa différentielle en ce point est inversible.

Nous donnons maintenant le théorème des fonctions implicites en l'énonçant d'abord dans un cas particulier, celui d'une équation à deux variables réelles permettant d'obtenir au **voisinage d'un point "régulier"** une fonction $x \to y = g(x)$.
Nous donnons ensuite ce théorème dans le cas général de n équations à $(m+n)$ variables $x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n$:

$$\begin{cases} f_1(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n) = 0 \\ f_2(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n) = 0 \quad l \\ \vdots f_n(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n) = 0 \end{cases}$$

qui, grâce aux notations suivantes $x = (x_1, \ldots, x_m), y = (y_1, \ldots, y_n)$ et $f = (f_1, \ldots, f_n)$, s'écrira

$$f(x, y) = 0 (\Leftrightarrow f_i(x, y) = 0, i = 1, \ldots, n).$$

Le théorème des fonctions implicites permettra d'obtenir localement, **ie. au voisinage d'un point régulier** n fonctions $g_1, \ldots, g_n$ telles que :

$$g_i : (x_1, \ldots, x_n) \to y_i = g_i(x_1, \ldots, x_n), i = 1, \ldots, n.$$

Soit une fonction $g = (g_1, \ldots, g_n)$ avec $g(x) = (g_1(x), \ldots, g_n(x))$.

Theorème 2 (Fonctions Implictes cas $n = m = 1$) *Si*
. *Ω est un ouvert de $I\!R^2$, (a, b) un point de Ω,*
. *$f : (x, y) \to f(x, y)$ est une fonction réelle de classe C^1 sur Ω telle que $f(a, b) = 0$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a, b) \neq 0$*
Alors
. *il existe un ouvert V de $I\!R^2$ avec $(a, b) \in V, V \subset \Omega$ et un ouvert U de $I\!R$ avec $a \in U$ tels que à tout $x \in U$, on peut associer un et un seul y tel que $(x, y) \in V$ et $f(x, y) = 0$,*

. *on définit ainsi une fonction g de U dans $\mathbb{R}$ de classe C^1 sur U vérifiant $b = g(a)$ et $\forall x \in U, f(x, g(x)) = 0$,*

. *la dérivée $g'(a)$ de cette fonction g au point a est donnée par :*

$$g'(a) = -\left[\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right]^{-1} . \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = -\left[\frac{\partial f}{\partial y}(a,g(a))\right]^{-1} . \frac{\partial f}{\partial x}(a,g(a)) \qquad (1)$$

Remarque 1 (Remarques Fondamentales) *. La définition de g est purement* **locale***, l'ouvert U peut être "très petit", le théorème ne donne aucun moyen de le construire ; il est, évidemment, non unique.*

. *En tout point $x \in U$, tel que $\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) \neq 0$,il est possible de calculer $g'(x)$ avec une relation du type (1) comme on l'a fait pour $g'(a)$.*

. *Ce résultat (1) est remarquable dans le sens où il permet de calculer la dérivée de g en un point sans que l'on connaisse explicitement la fonction g.*

. *En effet, en général on ne saura pas expliciter la fonction, seulement des cas "simples" le permettront.*

Regardons maintenant le cas général : $(n, m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$

Pour énoncer le théorème des fonctions implicites dans le cas général, on a besoin des notations suivantes :

. Si f est une application d'un ouvert V de $\mathbb{R}^{n+m}$ dans $\mathbb{R}^n$, différentiable sur V et si l'on pose $x = (x_1, \ldots, x_m)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$, et $(x, y) = (x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n)$, on note :

. $D_x f(x, y)$ la matrice

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x,y) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(x,y) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x,y) & \ldots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(x,y) \end{bmatrix}$$

. $D_y f(x, y)$ la matrice

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(x,y) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial y_n}(x,y) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial y_1}(x,y) & \ldots & \frac{\partial f_n}{\partial y_n}(x,y) \end{bmatrix}$$

. $Df(x, y)$ la matrice

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x,y) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(x,y) & \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(x,y) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial y_n}(x,y) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x,y) & \ldots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(x,y) & \frac{\partial f_n}{\partial y_1}(x,y) & \ldots & \frac{\partial f_n}{\partial y_n}(x,y) \end{bmatrix}$$

Ainsi, si U est un ouvert de $\mathbb{R}^m$ et g une application différentiable sur U à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ $g = (g_1, \ldots, g_n)$, on note $D_g(x)$ la matrice

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(x,y) & \ldots & \frac{\partial g_1}{\partial x_m}(x,y) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial y_1}(x,y) & \ldots & \frac{\partial g_n}{\partial x_m}(x,y) \end{bmatrix}$$

On rappelle que la notation $\mathbb{R}^{m+n}$ désigne l'espace produit $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$.

Theorème 3 (Théorème des Fonctions Implictes) *Si*

- . Ω *est un* **ouvert** *de* $I\!R^{m+n}$, *si* (a,b) *est un point de* Ω, *avec* $a = (a_1, \ldots, a_m)$ *et* $b = (b_1, \ldots, b_n)$,
- . f *est une* **fonction de classe** C^1 *sur* Ω *à valeurs dans* $I\!R^n$ *(*$f : (x,y) \to f(x,y)$ *avec les notations précédentes) telle que* $f(a,b) = 0$ *et* $D_y f(a,b)$ *soit une* **matrice inversible**.

Alors

- . *il existe un* **ouvert** V **de** $I\!R^{m+n}$ *avec* $(a,b) \in V, V \subset \Omega$ *et un* **ouvert** U **de** $I\!R^m$ *avec* $a \in U$ *tels que à tout* $x \in U$, *on peut associer un et un seul* y *tel que* $(x,y) \in V$ *et* $f(x,y) = 0$,
- . *on définit ainsi une fonction* g *de* U *dans* $I\!R^n$ *de classe* C^1 *sur* U *vérifiant* $b = g(a)(ie.b_i = g_i(a), i = 1, \ldots, n)$ *et* $\forall x \in U, f(x, g(x)) = 0, (ie.f_i(x, g(x)) = 0, i = 1, \ldots, n)$
- . *la matrice* $Dg(a)$ *est donnée par :*

$$Dg(a) = -\left[D_y f(a,b)\right]^{-1}.D_x f(a,b) = -\left[D_y f(a,g(a))\right]^{-1}.Dxf(a,g(a)) \qquad (2)$$

où $[D_y f(a,b)]^{-1}$ *désigne la matrice inverse de* $[D_y f(a,b)]$.

Remarque 2 (Remarques Fondamentales) *Ceux sont les mêmes que celles faites après le théorème énoncé dans le cas* $n = m = 1$.

- . *En général, on* **n'est pas capable de donner la fonction** g **sous forme explicite** $g : x \to g(x)$, *par contre la relation (2) permetde calculer* $Dg(x)$ *en tout point* $x \in U$ *tel que* $D_y f(x,y)$ *soit inversible.*
- . *La définition de* g *est purement* **locale**, *les ouverts* U *et* V *pouvant être "très petits", le théorème ne donne aucun moyen de les construire ; ils sont, évidemment, non unique.*
- . *En tout point* $x \in U$, *tel que* $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) \neq 0$,*il est possible de calculer* $g'(x)$ *avec une relation du type (1) comme on l'a fait pour* $g'(a)$.