Fonctions de Plusieurs Variables - Correction Examen 2010

Frédéric Messine et Jordan Ninin

1 Exercice 1 : Continuité et Différentiabilité

Etude de la continuité et de la différentiabilité en $(0,0)$ des fonctions suivantes :

1. Etudions la continuité de f_1 pour $\alpha = 2$ et $\alpha = 4$:

$$f_1(x,y) = \begin{cases} \frac{|x|^\alpha y^2}{|x|^3+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

   On a que $y^2 \leq y^2 + |x|^3$ d'où,

$$0 \leq |f_1(x,y)| \leq \frac{|x|^\alpha y^2}{y^2} = |x|^\alpha$$

   On voit que si α est strictement positif alors, la limite de $f_1(x,y)$ tend vers 0 quand (x,y) tend vers $(0,0)$; car le majorant vaut 0 en $(0,0)$. Donc, on a que pour $\alpha = 2$ et $\alpha = 4$ alors la fonction f_1 est bien continue au point $(0,0)$.

2. En ce qui concerne la différentiabilité de f_1 au point $(0,0)$,
   - En utilisant les mêmes fonctions majorantes que précédemment et $x^2 \leq x^2 + y^2$ on a que :

$$\epsilon(h,k) \leq \frac{|h|^\alpha k^2}{k^2\sqrt{h^2+k^2}} \leq |h|^{\alpha-1}$$

     On remarque que la limite de ce majorant est bien 0 en $(0,0)$ pour $\alpha = 2$ et $\alpha = 4$. Donc f_1 est bien différentiable en $(0,0)$ pour $\alpha = 2$ et $\alpha = 4$.

   Donc f_1 est continue et différenciable en $(0,0)$ pour $\alpha = 2$ et $\alpha = 4$.

Pour la deuxième fonction f_2, nous obtenons les résultats suivants :

1. Etudions la continuité de f_2 :

$$f_2(x,y) = \begin{cases} \frac{|x|^\alpha |y|^\beta}{(x^2+y^2)^\gamma} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

   On a que $x^{2\gamma} \leq (x^2+y^2)^\gamma$ et $y^{2\gamma} \leq (x^2+y^2)^\gamma$, d'où le résultat suivant

$$0 \leq |f_2(x,y)| \leq (x^2+y^2)^{\alpha+\beta-2\gamma}.$$

   - On voit que si $\alpha + \beta > 2\gamma$ alors, la limite de $f_2(x,y)$ tend vers 0 quand (x,y) tend vers $(0,0)$; car le majorant vaut 0 en $(0,0)$. Donc, on a que si $\alpha + \beta > 2\gamma$ alors la fonction f_2 est bien continue au point $(0,0)$.
   - Si $\alpha + \beta = 2\gamma$ et si l'on prend la direction $y = x$, on a que $f_2(x,x) = \frac{1}{2^\gamma} \neq 0$, et donc f_2 n'est pas continue dans ce cas $(\alpha + \beta = 2\gamma)$ au point $(0,0)$.

- Si $\alpha+\beta < 2\gamma$ et si l'on prend la direction $y = x$, on a que$f_2(x,x) = \frac{1}{2\gamma}x^{\alpha+\beta-2\gamma}$ qui tend vers $+\infty$ et non vers 0 quand x tend vers 0. Donc on a bien une direction où les limites ne coïncideront pas et donc f_2 n'est pas continue dans ce cas non plus.

2. En ce qui concerne la différentiabilité de f_2 au point $(0,0)$, on peut déjà dire que f_2 n'est pas différentiable en $(0,0)$ quand $\alpha+\beta \leq 2\gamma$ car f_2 n'est déjà pas continue en $(0,0)$ dans ce cas là. Il reste donc les cas où $\alpha+\beta > 2\gamma$.
   - En utilisant les mêmes fonctions majorantes que précédemment et utilisant le fait que $x^2+y^2 \geq 2|xy| \geq |xy|$, on a que :
   $$\epsilon(h,k) = \frac{|h|^\alpha |k|^\beta}{(x^2+y^2)^{\gamma+1/2}} \leq (x^2+y^2)^{\alpha+\beta-2\gamma-1/2}$$
   . On remarque que la limite de ce majorant est bien 0 en $(0,0)$ si $\alpha+\beta > 2\gamma+1/2$. Donc si $\alpha+\beta > 2\gamma+1/2$, on a que f_2 est bien différentiable en $(0,0)$.
   - Si $\alpha+\beta = 2\gamma+1/2$ et dans la direction $h = k$, on a que $\epsilon(h,h) = \frac{1}{2^{\gamma+1/2}} \neq 0$ et donc f_2 n'est pas différentiable en $(0,0)$.
   - Si $\alpha+\beta < 2\gamma+1/2$, et en prenant la même direction $h = k$, on a que : $\epsilon(h,h) = \frac{1}{2^{\gamma+1/2}}|h|^{\alpha+\beta-2\gamma-1/2}$ tend vers $+\infty$ dans cette direction quand h tend 0. D'où f_2 n'est pas différentiable en $(0,0)$ dans ce cas.

   Donc f_2 est continue en $(0,0)$ si et seulement si $\alpha+\beta > 2\gamma$ et f_2 est différentiable en $(0,0)$ si et seulement si $\alpha+\beta > 2\gamma+1/2$.

2 Exercice 2 : Dérivation

1. Soit g une fonction définie de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^3$ par :
$$g(x,y) = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2+3x+4y \\ 4x^2y+\exp xy \\ x^3-5xy \end{pmatrix}$$
L'expression de sa matrice jacobienne est donc :
$$J_g(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y} \\ \frac{\partial g_3}{\partial x} & \frac{\partial g_3}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+3 & 4 \\ 8xy+y\exp xy & 4x^2+x\exp xy \\ 3x^2-5y & -5x \end{pmatrix}$$
Soit F Une Fonction définie de $\mathbb{R}^3$ sur $\mathbb{R}^2$ par :
$$f(u,v,w) = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^2v+v^2w+uvw \\ uv-vx+u^2v^2w \end{pmatrix}$$
L'expression de sa matrice jacobienne est donc :
$$J_f(u,v,w) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_1}{\partial v} & \frac{\partial f_1}{\partial w} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial v} & \frac{\partial f_2}{\partial w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2uv+vw & u^2+2vw+uw & v^2+uv \\ v+2uv^2w & u-w+2u^2vw & -v+u^2v^2 \end{pmatrix}$$

2. Remarquons que $f(g(x,y))$ est une fonction définie de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$. Donc sa matrice jacobienne sera de taille 2×2 et elle est définie par le produit matriciel suivant :
$$J_{f\circ g}(x,y) = J_f(x^2+3x+4y, 4x^2y+\exp xy, x^3-5xy) \times J_g(x,y).$$

3. De même $g(f(x,y,z))$ est une fonction définie de $I\!R^3$ sur $I\!R^3$. Donc sa matrice jacobienne sera de taille 3×3 et elle est définie par le produit matriciel suivant :

$$J_{g\circ f}(x,y,z) = J_g(x^2y + y^2z + xyz, xy - yz + x^2y^2z) \times J_f(x,y,z).$$

3 Exercice 3 : Optimisation

1. Soit la fonction suivante :

$$f(x,y) = 2x^2 + 4xy^2 + 4y^4 + 4x + 1$$

1. Le gradient est :

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 4x + 4y^2 + 4 \\ 8xy + 16y^3 \end{pmatrix}.$$

Nous voulons résoudre $\nabla f(x,y) = 0$. L'équation (1) donne $x = -y^4 - 1$. L'équation (2) donne : $16y^2 + 8x = 0$ ou $y = 0$.
– Pour $y = 0$ alors $x = -1$.
– Sinon $16y^2 + 8x = 0$ alors en remplaçant dans l'équation (1), on a $-8y^4 + 16y^2 - 8 = 0$. $\Delta = 16^2 - 4 * 8 * 8 = 0$ donc $y^2 = 1$. On obtient alors les points $(-2,1)$ et $(-2,-1)$.
On en déduit les solutions possible du gradient nul sont : $M_1 = (-1,0)$, $M_2 = (-2,1)$ et $M_3 = (-2,-1)$.

2. Les dérivées secondes sont :

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 4 & 8y \\ 8y & 8x + 48y^2 \end{pmatrix}$$

– Au point $(-1,0)$ on a que $r = 4, s = 0$ et $t = -8$. D'où $\Delta' = s^2 - rt = 32 > 0$. Donc M_1 n'est ni un maximum ni un minimum de f.
– Au point $(-2,1)$ on a que $r = 4, s = 8$ et $t = 32$. D'où $\Delta' = -64 < 0$. Or $r > 0$, donc M_2 est un minimum local de f.
– Au point $(-2,-1)$ on a que $r = 4, s = -8$ et $t = 32$. D'où $\Delta' = -64 < 0$. Or $r > 0$, donc M_3 est un minimum local de f.
De plus, $\lim_{||x,y||\to\infty} f(x,y) = +\infty$ et $f(-2,1) = f(-2,-1) = -3$, donc M_2 et M_3 sont deux minima globaux de f.

2. Soit la fonction suivante :

$$f(x,y) = y^2 + y\ln(x), \text{ avec } (x,y) \in [\frac{1}{2}, +\infty[\times I\!R.$$

1. Le gradient est :

$$\nabla f(x,y) = \Big(\frac{y}{x}, 2y + \ln(x)\Big)^T.$$

Nous voulons résoudre $\nabla f(x,y) = 0$. L'équation (1) nous donne $y = 0$ et l'équation (2) $\ln(x) = 0$, c'est-à-dire $x = 1$. Donc f admet un unique point stationnaire en $M = (1,0)$.

2. La matrice Hessienne est :

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} -y/x & 1/x \\ 1/x & 2 \end{pmatrix}$$

Au point $M = (1,0)$ on a que $r = 0, s = 1$ et $t = 2$. D'où $\Delta' = s^2 - rt = 1 > 0$. Donc M n'est ni un maximum ni un minimum de f.

Étudions le comportement de f sur le bord du dommaine :
- $\lim_{||x,y||\to\infty} f(x,y) = +\infty$
- Pour $x = \frac{1}{2}$, $f(\frac{1}{2}, y) = y^2 - \ln(2)y$

  Cette fonction admet un minimum en $y = \dfrac{\ln(2)}{2}$ et $f(\dfrac{1}{2}, \dfrac{\ln(2)}{2}) = -\dfrac{\ln(2)^2}{2}$.

Donc f admet un minimum global en $(\dfrac{1}{2}, \dfrac{\ln(2)}{2})$ sur $[\dfrac{1}{2}, +\infty[\times \mathbb{R}$.

4 Exercice 4 : Formes Différentielles

1.
$$\omega_1 = (4x + xy^2)dx + (x^2y - 1 + y^3)dy$$

$P(x,y) = (4x + xy^2)$ et $Q(x,y) = (x^2y - 1 + y^3)$.
On a que

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = 2xy = \frac{\partial Q(x,y,z)}{\partial x}$$

c'est donc une forme différentielle totale exacte.
Notons là $df_1 = \omega_1$.

$$f_1(x,y) = 2x^2 + \frac{1}{2}x^2y^2 + C(y),$$

De plus, $C(y) = \frac{1}{4}y^4 - y + K$ avec $K \in \mathbb{R}$ car $\frac{\partial f_1(x,y)}{\partial y} = Q(x,y) + C'(y)$, donc $C'(y) = y^3 - 1$.
D'où,

$$f_1(x,y) = 2x^2 + \frac{1}{2}x^2y^2 + \frac{1}{4}y^4 - y + K.$$

2.
$$\omega_2 = (-y^3\sin(xy^2) + 3x^2y)dx + \left(\cos(xy^2) - 2y^2\sin(xy^2)x + x^3\right)dy$$

Avec $P(x,y) = -y^3\sin(xy^2) + 3x^2y$ et $Q(x,y) = \cos(xy^2) - 2y^2\sin(xy^2)x + x^3$.
On a que :

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = -y^5\cos(xy^2) + 3x^2.$$

et

$$\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = (-2y - 4xy)\sin(xy^2) - 4x^2y^3\cos(xy^2)$$

ce n'est donc pas une forme différentielle totale exacte.

3.
$$\omega_3 = (yz + 6xz)dx + (xz + 2z^3y)dy + (xy + 3x^2 + 3z^2y^2)dz$$

$P(x,y,z) = yz + 6xz$, $Q(x,y,z) = xz + 2z^3y$ et $R(x,y,z) = xy + 3x^2 + 3z^2y^2$.
On a que

$$\frac{\partial P(x,y,z)}{\partial y} = z = \frac{\partial Q(x,y,z)}{\partial x}, \frac{\partial P(x,y,z)}{\partial z} = y + 6x = \frac{\partial R(x,y,z)}{\partial x}$$

et

$$\frac{\partial Q(x,y,z)}{\partial z} = x + 6z^2y = \frac{\partial R(x,y,z)}{\partial y}$$

c'est donc une forme différentielle totale exacte.
Notons là $df_3 = \omega_3$.
On a que

$$f_3(x,y,z) = xyz + 3x^2z + C(y,z).$$

De plus,

$$\frac{\partial f_3}{\partial y} = xz + \frac{\partial C}{\partial y}(y,z) = xz + 2z^3y.$$

Donc

$$f_3(x,y,z) = xyz + 3x^2z + y^2z^3 + K(z).$$

Or,

$$\frac{\partial f_3}{\partial z} = xy + 3x^2 + 3y^2z^2 + K'(z) = xy + 3x^2 + 3z^2y^2$$

D'où,

$$f_3(x,y,z) = xyz + 3x^2z + y^2z^3 + K, \text{ avec } K \in \mathbb{R}.$$