Fonctions de Plusieurs Variables - Correction Examen 2008

Frédéric Messine

1 Exercice 1 : Continuité et Différentiabilité

Etude de la continuité et de la différentiabilité en $(0,0)$ des fonctions suivantes :

1. Etudions la continuité de f_1 :

$$f_1(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2|y|^\alpha}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

On a que $x^2 \leq x^2+y^2$, et $|y|^\alpha \leq (x^2+y^2)^\alpha$, d'où,

$$0 \leq |f_1(x,y)| \leq \frac{(x^2+y^2)^{1+\frac{\alpha}{2}}}{x^2+y^2} = (x^2+y^2)^{\frac{\alpha}{2}}$$

– On voit que si α est strictement positif alors, la limite de $f_1(x,y)$ tend vers 0 quand (x,y) tend vers $(0,0)$; car le majorant vaut 0 en $(0,0)$. Donc, on a que si $\alpha > 0$ alors la fonction f_1 est bien continue au point $(0,0)$.
– Si $\alpha = 0$ et si l'on prend la direction $y = x$, on a que $f_1(x,x) = \frac{1}{2} \neq 0$, et donc f_1 n'est pas continue dans ce cas ($\alpha = 0$) au point $(0,0)$.
– Si $\alpha < 0$ et si l'on prend la direction $y = x$, on a que $f_1(x,x) = \frac{|x|^{2+\alpha}}{2x^2} = \frac{1}{2}|x|^\alpha$ qui tend vers $+\infty$ et non vers 0 quand x tend vers 0. Donc on a bien une direction où les limites ne coïncideront pas et donc f_1 n'est pas continue dans ce cas non plus.

2. En ce qui concerne la différentiabilité de f_1 au point $(0,0)$, on peut déjà dire que f_1 n'est pas différentiable en $(0,0)$ quand $\alpha \leq 0$ car f_1 n'est déjà pas continue en $(0,0)$ dans ce cas là. Reste donc les cas où $\alpha > 0$.
– En utilisant les mêmes fonctions majorantes que précédemment, on a que :

$$\epsilon(h,k) = \frac{h^2|k|^\alpha}{(h^2+k^2)^{-\frac{3}{2}}} \leq (x^2+y^2)^{1+\frac{\alpha}{2}-\frac{3}{2}} = (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}(\alpha-1)}$$

On remarque que la limite de ce majorant est bien 0 en $(0,0)$ si $\alpha > 1$. Donc si $\alpha > 1$ on a que f_1 est bien différentiable en $(0,0)$.
– Si $\alpha = 1$ et dans la direction $h = k$, on a que $\epsilon(h,h) = \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}} \neq 0$ et donc f_1 n'est pas différentiable en $(0,0)$.
– Si $\alpha \in]0,1[$, et en prenant la direction $h = k$, on a que : $\epsilon(h,h) = \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}|h|^{\alpha-1}}$ tend vers $+\infty$ dans cette direction quand h tend 0. D'où f_1 n'est pas différentiable en $(0,0)$ dans ce cas.

Donc f_1 est continue en $(0,0)$ si et seulement si $\alpha > 0$ et f_1 est différentiable en $(0,0)$ si et seulement si $\alpha > 1$.

Pour la deuxième fonction f_2, nous obtenons les résultats suivants :

1. Etudions la continuité de f_2 :

$$f_2(x,y) = \begin{cases} \frac{|xy|^\alpha}{4x^2-3|xy|+9y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

   On a que $4x^2 - 3|xy| + 9y^2 \geq 9|xy| \geq |xy|$, car $(2|x| - 3|y|)^2 \geq 0$ et $(2|x| - 3|y|)^2 = 4x^2 - 12|xy| + 9y^2$, d'où le résultat suivant

$$0 \leq |f_2(x,y)| \leq \frac{|xy|^\alpha}{|xy|} = |xy|^{\alpha-1}.$$

   – On voit que si $\alpha > 1$ alors, la limite de $f_2(x,y)$ tend vers 0 quand (x,y) tend vers $(0,0)$; car le majorant vaut 0 en $(0,0)$. Donc, on a que si $\alpha > 1$ alors la fonction f_1 est bien continue au point $(0,0)$.
   – Si $\alpha = 1$ et si l'on prend la direction $y = x$, on a que $f_2(x,x) = \frac{1}{10} \neq 0$, et donc f_2 n'est pas continue dans ce cas ($\alpha = 1$) au point $(0,0)$.
   – Si $\alpha < 1$ et si l'on prend la direction $y = x$, on a que $f_2(x,x) = \frac{|x|^{2\alpha}}{10x^2} = \frac{1}{10}|x|^{2(\alpha-1)}$ qui tend vers $+\infty$ et non vers 0 quand x tend vers 0. Donc on a bien une direction où les limites ne coïncideront pas et donc f_2 n'est pas continue dans ce cas non plus.

2. En ce qui concerne la différentiabilité de f_2 au point $(0,0)$, on peut déjà dire que f_2 n'est pas différentiable en $(0,0)$ quand $\alpha \leq 1$ car f_2 n'est déjà pas continue en $(0,0)$ dans ce cas là. Reste donc les cas où $\alpha > 1$.
   – En utilisant les mêmes fonctions majorantes que précédemment et utilisant le fait que $x^2 + y^2 \geq 2|xy| \geq |xy|$, on a que :

$$\epsilon(h,k) = \frac{|hk|^\alpha}{|hk| \times |hk|} \leq |hk|^{\alpha-2}$$

     On remarque que la limite de ce majorant est bien 0 en $(0,0)$ si $\alpha > 2$. Donc si $\alpha > 2$, on a que f_2 est bien différentiable en $(0,0)$.
   – Si $\alpha = 2$ et dans la direction $h = k$, on a que $\epsilon(h,h) = \frac{h^2}{10h^2 \times 2h^2} = \frac{1}{20} \neq 0$ et donc f_2 n'est pas différentiable en $(0,0)$.
   – Si $\alpha \in]1,2[$, et en prenant la même direction $h = k$, on a que : $\epsilon(h,h) = \frac{1}{20}|h|^{2\alpha-2}$ tend vers $+\infty$ dans cette direction quand h tend 0. D'où f_2 n'est pas différentiable en $(0,0)$ dans ce cas.

   Donc f_2 est continue en $(0,0)$ si et seulement si $\alpha > 1$ et f_2 est différentiable en $(0,0)$ si et seulement si $\alpha > 2$.

2 Exercice 2 : Dérivation

Soit ϕ une fonction définie de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\phi(x,y) = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x + y \\ x + \beta y \end{pmatrix}$$

On note $F(\phi(x,y)) = F(u,v) = f(x,y)$.

1. On a que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial v} = \alpha\frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial v}$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial v} = \frac{\partial F}{\partial u} + \beta\frac{\partial F}{\partial v}$$

Les opérateurs de dérivations sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x} = \alpha\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v} \\ \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial u} + \beta\frac{\partial}{\partial v} \end{array} \right.$$

2. Les dérivées premières sont donc

$$\begin{array}{rcl} \frac{\partial f}{\partial x} & = & \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial v} = \alpha\frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial f}{\partial y} & = & \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial v} = \frac{\partial F}{\partial u} + \beta\frac{\partial F}{\partial v} \end{array}$$

Comme on l'a vu précédemment et en réappliquant l'opérateur de dérivation, on a les dérivées secondes suivantes :

$$\begin{array}{rcl} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & = & \alpha^2\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + 2\alpha\frac{\partial^2 F}{\partial u\partial v} + \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & = & \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + 2\beta\frac{\partial^2 F}{\partial u\partial v} + \beta^2\frac{\partial^2 F}{\partial v^2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} & = & \alpha\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + (1+\alpha\beta)\frac{\partial^2 F}{\partial u\partial v} + \beta\frac{\partial^2 F}{\partial v^2} \end{array}$$

3. A partir de

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0$$

on obtient l'équation suivante :

$$(\frac{1}{2}\alpha^2 + 2\alpha + \frac{1}{2})\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}(x,y) + (\alpha + 2(\alpha\beta+1)+\beta)\frac{\partial^2 F}{\partial u\partial v}(x,y) + (\frac{1}{2}\beta^2 + 2\beta + \frac{1}{2})\frac{\partial^2 F}{\partial v^2}(x,y) = 0$$

Pour revenir à $\frac{\partial^2 F}{\partial u\partial v}(x,y) = 0$, il faut donc résoudre l'équation :

$$(\frac{1}{2}z^2 + 2z + \frac{1}{2}) = 0 \Longleftrightarrow z^2 + 4z + 1 = 0.$$

$\Delta = 16 - 4 = 12$ et donc on a les deux solutions suivantes :

$$z_1 = \frac{-4 - 2\sqrt{3}}{2} = -2 - \sqrt{3} \text{ et } z_2 = -2 + \sqrt{3}.$$

D'où l'on a que $\alpha = z_1 = -2 - \sqrt{3}$ et $\beta = z_2 = -2 + \sqrt{3}$ et comme $\alpha + 2(\alpha\beta + 1) + \beta = -2 - \sqrt{3} + 2\left((-2-\sqrt{3})(-2+\sqrt{3}) + 1\right) - 2 + \sqrt{3} = -4 + 2((4-3)+1) = 0$. Donc, on ne peut pas retomber sur l'équation $\frac{\partial^2 F}{\partial u\partial v}(x,y) = 0$.

4. La matrice Jacobienne de ϕ est :

$$J_\phi(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & \beta \end{pmatrix}$$

Or d'après le théorème sur la composition des fonctions on a que $f(x,y) = F(\phi(x,y))$ et donc :

$$\nabla f(x,y) = J_\phi(x,y)\nabla F(\phi(x,y)),$$

et l'on retrouve les résultats précédents.
En calulant l'inverse de J_ϕ on en déduira que $\nabla F(u,v) = J_\phi(x,y)^{-1}\nabla f(x,y)$. Or,

$$J_\phi(x,y)^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & \beta \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det J_\phi(x,y)} \begin{pmatrix} \beta & -1 \\ -1 & \alpha \end{pmatrix} = \frac{1}{\alpha\beta - 1} \begin{pmatrix} \beta & -1 \\ -1 & \alpha \end{pmatrix}$$

Et donc on a que

$$\frac{\partial F}{\partial u} = \frac{1}{\alpha\beta - 1}\left(\beta\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$
$$\frac{\partial F}{\partial v} = \frac{1}{\alpha\beta - 1}\left(-\frac{\partial f}{\partial x} + \alpha\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

3 Exercice 3 : Optimisation

1. Soit la fonction suivante :

$$f(x,y) = x^2 - 2xy^2 + y^4 + 2x$$

   1. Le gradient est :
   $$\nabla f(x,y) = (2x - 2y^2 + 2, -4xy + 4y^3)^T.$$
   Nous voulons résoudre $\nabla f(x,y) = 0$. L'équation (1) donne $y^2 = x + 1$. L'équation (2) donne : $y(-4x+4y^2) = 0$ donc $y = 0$ ou $-4x+4y^2 = 0$. En remplaçant dans $-4x+4y^2 = 0$ y^2 par $x+1$ on obtient la contradiction $4 = 0$ donc $-4x+4y^2 \neq 0$ et on a que la possibilité $y = 0$.
   On en déduit la seule solution possible de gradient nul : $(-1, 0)$.
   2. Les dérivées secondes sont :
   $$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & -4y \\ -4y & -4x + 12y^2 \end{pmatrix}$$
   Donc au point $(-1,0)$ on a que $r = 2$, $s = 0$ et $t = 4$. D'où $\Delta' = s^2 - rt = 0 - 2\times 4 = -8 < 0$. On en conclut que comme $r > 0$, c'est un minimimum local qui est global ici car on a qu'un seul point stationnaire qui annule le gradient.

2. Soit la fonction suivante :
$$f(x,y) = cos(x^2 + y^2)$$
   1. Le gradient est :
   $$\nabla f(x,y) = \left(-2x\sin(x^2+y^2), -2y\sin(x^2+y^2)\right)^T.$$
   Nous voulons résoudre $\nabla f(x,y) = 0$. Une solution evidente est $(0,0)$. Ensuite il existe une infinité de solutions annulant le gradient, il suffit que
   $$x^2 + y^2 = k \times \pi, \text{ avec } k \in I\!N.$$

2. La matrice Hessienne est :

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} -4\cos\left(x^2+y^2\right)x^2 - 2\sin\left(x^2+y^2\right) & -4\cos\left(x^2+y^2\right)yx \\ -4\cos\left(x^2+y^2\right)yx & -4\cos\left(x^2+y^2\right)y^2 - 2\sin\left(x^2+y^2\right) \end{pmatrix}$$

Si $x^2+y^2=0$ alors $x=y=0$ et $H_f(0,0)$ est nulle et donc on ne peut conclure.
Si $x^2+y^2=k\pi$ avec k impair, alors, pour ces points $P=(x,y)$ on a que :

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 4x^2 & 4xy \\ 4xy & 4y^2 \end{pmatrix}$$

Or $\Delta' = s^2 - rt$ est égal ici à zéro et on ne peut conclure.
Il en va de même pour $x^2+y^2=k\pi$ avec k pair avec :

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} -4x^2 & -4xy \\ -4xy & -4y^2 \end{pmatrix}$$

Cependant, pour les points $P=(x,y)$ avec $x^2+y^2=k\pi$ et k pair, on a que $f(x,y) = \cos(k\pi) = 1$ et ce sont bien des maxima globaux pour une fonction cosinus.
De même, pour les points $P=(x,y)$ avec $x^2+y^2=k\pi$ et k impair, on a que $f(x,y) = \cos(k\pi) = -1$ et ce sont bien des minima globaux pour une fonction cosinus.

4 Exercice 4 : Formes Différentielles

1.

$$\omega_1 = xyzdx + \frac{x^2z}{2}dy + \frac{x^2y}{2}dz$$

$P(x,y,z) = xyz$, $Q(x,y,z) = \frac{x^2z}{2}$ et $R(x,y,z) = \frac{x^2y}{2}$.
On a que

$$\frac{\partial P(x,y,z)}{\partial y} = xz = \frac{\partial Q(x,y,z)}{\partial x}, \frac{\partial P(x,y,z)}{\partial z} = xy = \frac{\partial R(x,y,z)}{\partial x}$$

et

$$\frac{\partial Q(x,y,z)}{\partial z} = \frac{x^2}{2} = \frac{\partial R(x,y,z)}{\partial y}$$

c'est donc une forme différentielle totale exacte.
Notons là $df_1 = \omega_1$.

$$f_1(x,y,z) = \frac{x^2yz}{2} + C(y,z),$$

De plus, $C(y,z) = K$ avec $K \in I\!R$ car $\frac{\partial f_1(x,y,z)}{\partial y} = Q(x,y,z) + \frac{\partial C(y,z)}{\partial y}$ et $\frac{\partial f_1(x,y,z)}{\partial z} = R(x,y,z) + \frac{\partial C(y,z)}{\partial z}$.
D'où,

$$f_1(x,y,z) = \frac{x^2yz}{2} + K.$$

2.
$$\omega_2 = y^2\cos(xy^2)\cos y dx + \left(2xy\cos(xy^2)\cos y - \sin(xy^2)\sin y\right) dy$$

Avec $P(x,y) = y^2\cos(xy^2)\cos y$ et $Q(x,y) = 2xy\cos(xy^2)\cos y - \sin(xy^2)\sin y - 2\sin y$.
On a que :

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = -y\left(-2\,\cos\left(xy^2\right)\cos\left(y\right) + 2\,y^2\sin\left(xy^2\right)x\cos\left(y\right) + y\cos\left(xy^2\right)\sin\left(y\right)\right) = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$$

c'est donc une forme différentielle totale exacte.
Une primitive de $P(x,y)$ par rapport à x, nous donne f_2 :

$$f_2(x,y) = \cos\left(y\right)\sin\left(xy^2\right) + C(y)$$

De plus,

$$\frac{\partial f_2(x,y)}{\partial y} = -\sin\left(xy^2\right)\sin\left(y\right) + 2\,xy\cos\left(xy^2\right)\cos\left(y\right) + \frac{\partial C(y)}{\partial y} = Q(x,y)$$

d'où $\frac{\partial C(y)}{\partial y} = -2\sin y$ et donc $C(y) = 2\cos y + K$ avec $K \in I\!R$.
On a donc,

$$f_2(x,y) = \cos\left(y\right)\sin\left(xy^2\right) + 2\cos y + K.$$

3.
$$\omega_3 = \ln\left(\frac{x^2}{y^2}\right)dx - \frac{2x}{y}dy$$

$P(x,y) = \ln\left(\frac{x^2}{y^2}\right)$ et $Q(x,y) = -\frac{2x}{y}$.
On a que

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = -\frac{2}{y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$$

c'est donc une forme différentielle totale exacte.
Une primitive de $P(x,y)$ par rapport à x n'est pas si évidente à trouver, partons plutôt de $Q(x,y)$. On a que

$$f_3(x,y) = -2x\ln y + C(x)$$

avec $\omega_3 = df$.
De plus,

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = -2\ln y + \frac{\partial C(x)}{\partial x} = P(x,y) = \ln\left(\frac{x^2}{y^2}\right)$$

Or $\ln\left(\frac{x^2}{y^2}\right) = 2(\ln x - \ln y)$ d'où $\frac{\partial C(x)}{\partial x} = 2\ln x$ et on a que

$$C(x) = 2x\ln x - 2x + K$$

avec $K \in I\!R$,
D'où

$$f_3(x,y) = -2x\ln y + 2x\ln x - 2x + K = x\ln\left(\frac{x^2}{y^2}\right) - 2x + K.$$