Changement de Variables dans les Dérivées

Frédéric Messine

Ce petit cours est une annexe au cours sur la différentiabilité. Le problème de changement de variables dans le calcul des dérivées partielles (problème mal compris en général) est un peu plus détaillé (de manière moins théorique et plus pratique).

Je corrigerai de manière détaillée l'exercice 5 (de la première série) qui est un grand classique que vous utiliserez tout le temps. Le cours nécessaire est rappelé dans la partie 1 : on a juste besoin de la dérivation de fonctions composées et des notions de difféomorphismes.

1 Dérivation des fonctions composées

Soient deux fonctions f définie de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^p$ et g définie de $\mathbb{R}^p$ sur $\mathbb{R}$ (pour simplifier) :

$$gof(x_1,\ldots,x_n) = g(f_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,f_p(x_1,\ldots,x_n))$$

On a :

$$\frac{\partial gof}{\partial x_i}(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial g}{\partial y_j}(f_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,f_p(x_1,\ldots,x_n))\frac{\partial f_j(x_1,\ldots,x_n)}{\partial x_i}$$

pour tout $i \in \{1,\ldots,n\}$ et avec $y_j = f_j(x1,\ldots,x_n)$.

2 Application à l'exercice 5

Soit $\phi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$, donc on peut calculer directement :

$$\frac{\partial F(r,\theta)}{\partial r} = \frac{\partial f(\phi(r,\theta))}{\partial r} = \frac{f(x,y)}{\partial r} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}$$

et

$$\frac{\partial F(r,\theta)}{\partial \theta} = \frac{\partial f(\phi(r,\theta))}{\partial \theta} = \frac{f(x,y)}{\partial \theta} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}$$

avec $f(x,y) = F(r,\theta) = f(\phi(r,\theta))$. Or dans ce cas, on sait calculer $\frac{\partial x}{\partial r} = \cos\theta$ et les autres aussi...
Le problème est que l'on demande $\frac{\partial f}{\partial x}$ en fonction de $\frac{\partial F}{\partial r}$ et $\frac{\partial F}{\partial \theta}$ et aussi par rapport à y.
On cherche donc :

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial F(r,\theta)}{\partial x} = \frac{\partial F(\phi^{-1}(x,y))}{\partial x} = \frac{\partial F(r,\theta)}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial F(r,\theta)}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x}$$

et

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial F(r,\theta)}{\partial y} = \frac{\partial F(\phi^{-1}(x,y))}{\partial y} = \frac{\partial F(r,\theta)}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial F(r,\theta)}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y}$$

Or dans ce cas, on ne connait pas $\phi^{-1}(x,y)$, ni $\frac{\partial r}{\partial x}$ etc...
Considérons la matrice Jacobienne J_ϕ :

$$J_\phi = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

En remarquant que :

$$\mathrm{grad}F(r,\theta) = J_\phi.\mathrm{grad}f(x,y)$$

où $\mathrm{grad}F(r,\theta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F(r,\theta)}{\partial r} \\ \frac{\partial F(r,\theta)}{\partial \theta} \end{pmatrix}$ et $\mathrm{grad}f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \end{pmatrix}$.
D'où :

$$J_\phi^{-1}\mathrm{grad}F(r,\theta) = \mathrm{grad}f(x,y)$$

ce que l'on cherche.
Donc on revient à l'étude du difféomorphisme ϕ, avec $J_\phi^{-1} = J_{\phi^{-1}}$.
Calculons J_ϕ^{-1} (cf phorum), on a : det $J_\phi = r$ or $r \neq 0$ et donc J_ϕ est inversible :

$$J_\phi^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\frac{sin\theta}{r} & \frac{cos\theta}{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial r}{\partial x} & \dfrac{\partial r}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \theta}{\partial x} & \dfrac{\partial \theta}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Remarque 1 *On s'aperçoit que même sans connaître explicitement θ en fonction de x et de y (ce qui ne serait pas si simple), on peut calculer ses dérivées partielles à l'aide de l'inversion de la matrice Jacobienne de ϕ :*

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{\sin\theta}{r} \text{ et } \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\cos\theta}{r}$$

Ces expressions ne sont cependant pas non plus fonction de x et de y.

On retrouve ainsi les résultats de l'exercice :

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \cos\theta\frac{\partial F(r,\theta)}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial F(r,\theta)}{\partial \theta}$$

et

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \sin\theta\frac{\partial F(r,\theta)}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial F(r,\theta)}{\partial \theta}$$

Voila donc, une autre façon d'aborder cet exercice de changement de variables.