Cours FPV - Semaine 2 : Différentiabilité de Fonctions de Plusieurs Variables

Frédéric Messine

1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons étudier la différentiabilité des fonctions de plusieurs variables dans le cas général; cad dans le cas de fonctions à valeurs vectorielles (nous utiliserons surtout de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$).

Le premier paragraphe porte sur la différentiabilité de fonctionnelle -augmentation du cours de la semaine précédente-. La seconde partie est l'extension des notions de limite et de continuité dans le cas de fonctions de plusieurs variables à valeurs vectorielles. Ainsi, la différentiabilité dans le cas général sera abordée dans la troisième partie et nous terminerons par une quatrième partie portant sur les développements de Taylor dans le cas général de fonctions de plusieurs variables à valeurs vectorielles et la dérivation d'ordre supérieur.

Pour la suite du cours, nous aurons besoin de l'introduction d'une nouvelle métrique : la norme (d'un vecteur). Vous avez remarqué que vous avez pu comprendre les notions de limite, de continuité et de différentiabilité sans avoir eu besoin d'assimiler un cours détaillé sur les espaces vectoriels.

Nous utiliserons dans ce qui suit et dans les exercices les trois normes suivantes, qui sont d'ailleurs en étroites relations avec les trois distances : d_1,d_2 et d_∞ :

Soit $x \in R^n$,

$$\begin{aligned} ||x||_1 &= \sum_{i=1}^{n} |x_i| \\ ||x||_2 &= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \\ ||x||_\infty &= \sup_{i\in\{1,\cdots,n\}} |x_i| \end{aligned}$$

Ainsi en toute généralité, les fonctions sont définies d'un espace vectoriel normé $(E,||.||_E)$ vers un autre $(F,||.||_F)$.

Remarque 1 *Dans le cas d'espaces vectoriels de dimensions finis (comme $\mathbb{R}^n$), toutes les normes sont équivalentes et donc les définitions de limite et de continuité que nous allons voir ne dépendent pas de la norme choisie.*

Remarque 2 *En fait cette nouvelle métrique peut aussi s'écrire à l'aide des distances, notamment à cause des bijections qu'il y a entre $\mathbb{R}^n$ et les notions d'espaces vectoriels et d'espaces affines. Ainsi, si l'on prend deux points P et Q dont les composantes sont dans $\mathbb{R}^n$, on s'aperçoit, à l'aide des définitions des distances et des normes, que :*

$$d_1(P,Q) = ||\vec{PQ}||_1 = ||P-Q||_1 = \sum_{i=1}^{n} |p_i - q_i|$$

$$d_2(P,Q) = ||\vec{PQ}||_2 = ||P-Q||_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (p_i - q_i)^2}$$

$$d_\infty(P,Q) = ||\vec{PQ}||_\infty = ||P-Q||_2 = \sup_{i \in \{1,\cdots,n\}} |p_i - q_i|$$

2 Différentiabilité des fonctionnelles

Dans cette partie, nous allons traité de la différentiabilité des fonctions numériques. Dans le premier chapitre, nous avons déjà présenté ce qu'étaient les dérivées partielles d'une telle fonction, soit :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(p_1,\cdots,p_n) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}}} \frac{f(p_1,\cdots,p_{i-1},p_i+h,p_{i+1},\cdots,p_n) - f(p_1,\cdots,p_{i-1},p_i,p_{i+1},\cdots,p_n)}{h}$$

De plus, on a vu que par définition f est dite de classe C^1 sur $A \subseteq \mathbb{R}^n$ si ses dérivées partielles étaient continues sur A.

2.1 Différentiabilité

Définition 1 *On dit que f est différentiable au point P, si il existe un opérateur linéaire L tel que :*

$$f(P+h) - f(P) = L.h + ||h||_A \epsilon(h)$$

avec

$$\lim_{||h||_A \to 0} \epsilon(h) = 0$$

L'opérateur linéaire s'appelle la différentielle au point P. Elle sera noté $df(P)$ et simplement df si il n'y a pas d'ambiguïté. h est bien sûr un élément de l'ensemble A et sert à définir la "direction" de dérivation (pour la différentiabilité, on les prend toutes en considérations).

Pour fixer les idées et bien comprendre ce à quoi correspond l'opérateur linéaire L, nous allons redonner cette définition dans le cas d'une fonction de trois variables.

Définition 2 *Soient trois réels a,b,c, on dit que f est différentiable au point (a,b,c), si il existe trois constantes réelles A,B,C telles que :*

$$f(a+h_1,b+h_2,c+h_3) - f(a,b,c) = A \times h_1 + B \times h_2 + C \times h_3 + ||(h_1,h_2,h_3)||_A \epsilon(h_1,h_2,h_3)$$

avec

$$\lim_{||h_1,h_2,h_3||_A \to 0} \epsilon(h_1,h_2,h_3) = 0$$

La fonction $(h_1,h_2,h_3) \to Ah_1 + Bh_2 + Ch_3$ *est bien une application linéaire et ainsi* (A,B,C). *définit notre opérateur linéaire (le point représentant le produit scalaire).*

Exemple 1 *Soit une fonctionnelle* f *de* $I\!R^2$ *dans* $I\!R$, *définie par :*

$$f(x,y) = x^4 + 3x^2y$$

Plaçons nous au point $(1,-1)$ *:*

$$\begin{aligned} f(1+h_1,-1+h_2) - f(1,-1) &= (1+h_1)^4 + 3(1+h_1)^2(-1+h_2) + 2 \\ &= 1 + 4h_1 + 6h_1^2 + 4h_1^3 + h_1^4 + (3 + 6h_1 + 3h_1^2)(-1+h_2) + 2 \\ &= 1 - 3 + 2 + (4-6)h_1 + 3h_2 + [6h_1^2 + 4h_1^3 + h_1^4 - 3h_1^2 \\ &\qquad +6h_1h_2 + 3h_1^2h_2] \\ &= -2h_1 + 3h_2 + ||(h_1,h_2)||\epsilon(h_1,h_2) \end{aligned}$$

On vérifie bien que $\epsilon(h_1,h_2) \to 0$ *quand* $(h_1,h_2) \to (0,0)$.

Donc f *est différentiable au point* $(1,-1)$ *et sa différentielle est l'application linéaire :*

$$df(1,-1) : (h_1,h_2) \to -2h_1 + 3h_2$$

On remarque que $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 4x^3 + 6xy$ *et* $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 3x^2$ *et donc que,* $\dfrac{\partial f(1,-1)}{\partial x} = 4-6 = -2$ *et que* $\dfrac{\partial f(1,-1)}{\partial y} = 3$ *ce qui correspond aux coefficients trouvés précédemment.*

Théorème 1 . *Si* f *est de classe* C^1 *sur un ouvert* U *de* $I\!R^n$ *alors* f *est différentiable sur* U.

. *Réciproquement, si* f *est différentiable sur* U *alors* f *admet des dérivées partielles. Celles-ci ne sont pas forcément continues et donc on n'a pas la réciproque complète. De plus, les dérivées partielles sont les coefficients de l'opérateur linéaire comme nous venons de le voir dans l'exemple précédent :*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(P) = l_i$$

où l_i *est la ième composante de l'opérateur linéaire* L.

Exemple 2 *Cet exemple va nous permettre d'illustrer le théorème précédent.*

Soit f *une fonction définie par*

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \ \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 \ \text{sinon.} \end{cases}$$

D'après les théorèmes généraux des compositions sur les fonctions de classe C^1, f *est de classe* C^1 *sur* $I\!R^2 \setminus \{0,0)\}$.

. f *est continue en* $(0,0)$, *en effet* $|f(x,y)| \leq x^2 \leq x^2 + y^2$ *donc* $|f(x,y)| \leq ||(x,y)||_2^2$ *et* $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

. *Dérivées partielles premières en* (0,0) *:*

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(h_1,0)-f(0,0)}{h_1}=\lim_{h_1\to 0} h_1\sin\frac{1}{|h_1|}=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{h_2\to 0}\frac{f(0,h_2)-f(0,0)}{h_2}=0\end{aligned}$$

. *Dérivées partielles premières sur* $I\!R^2\setminus\{(0,0)\}$ *:*

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 2x\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{x^3}{(\sqrt{x^2+y^2})^3}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= -\frac{x^2y}{(\sqrt{x^2+y^2})^3}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\end{aligned}$$

– *Différentiabilité en* (0,0) *:*
Si f est différentiable en (0,0) *alors on a correspondance avec les dérivées partielles et donc l'opérateur linéaire est l'opérateur nul. On a ainsi que :*

$$|\epsilon(h_1,h_2)|=\frac{|f(h_1,h_2)-f(0,0)|}{||(h_1,h_2)||_2}=\frac{\left|h_1^2\sin\frac{1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\right|}{||(h_1,h_2)||_2}\leq\frac{h_1^2}{||(h_1,h_2)||_2}\leq||(h_1,h_2)||_2$$

or $||(h_1,h_2)||_2\to 0$ *quand* $(h_1,h_2)\to(0,0)$. *f est donc différentiable en* (0,0).

. *f est elle de classe C^1 sur $I\!R^2$?*
Si $x>0$ alors $\frac{\partial f}{\partial x}(x,0)=2x\sin\left(\frac{1}{x}\right)-\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ *n'admet pas de limite quand x tend vers 0. Ainsi, cette dérivée partielle n'est pas continue en* (0,0) *et donc, f n'est pas de classe C^1 sur $I\!R^2$.*

2.2 Différentielle et exercices

On note la différentielle de f de la manière suivante :

$$df : h\to\frac{\partial f}{\partial x_1}h_1+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}h_n$$

On note aussi plus simplement :

$$df=\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n$$

Exemple 3 *Soit f la fonction définie par :*

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3y}{x^2+y^2} \textit{ si } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 \textit{ sinon.}\end{cases}$$

Montrons que f est différentiable en (0,0).

En regardant $f(x,0)$ on s'aperçoit que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$$

car $f(x,0) = 0, \forall x$.

De même, on a que

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

Donc si f est différentiable en $(0,0)$ son opérateur linéaire est nul, et donc

$$|\epsilon(h_1,h_2)| = \frac{|f(h_1,h_2) - f(0,0)|}{||(h_1,h_2)||_2} = \frac{|f(h_1,h_2)|}{||(h_1,h_2)||_2}$$

En prenant comme majorant : $|h|^3 \leq (\sqrt{h_1^2+h_2^2})^3$ et $|h_2| \leq \sqrt{h_1^2+h_2^2}$, d'où :

$$\epsilon(h_1,h_2) \leq ||(h_1,h_2)||_2$$

et la limite de cette expression est nulle lorsque $(h_1,h_2) \to (0,0)$.

La fonction f est donc différentiable en $(0,0)$ et ainsi sur tout $\mathbb{R}^2$.

Remarque 3 *Une fonction qui est différentiable en un point P admet des dérivées partielles en ce point. C'est une condition nécessaire pour que f soit différentiable, mais attention, cette condition n'est pas suffisante; une fonction peut avoir des dérivées partielles en un point sans être différentiable en ce point.*

Exemple 4 *Soit f la fonction définie par :*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

f est elle différentiable en $(0,0)$?

En remarquant que $f(x,0) = x$ et par symétrie que $f(0,y) = y$ on a que :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 1$$

Si f était différentiable en $(0,0)$, on aurait que $L.h = 1 \times h_1 + 1 \times h_2 = h_1 + h_2$. En prenant comme norme, la norme 1, nous obtenons que :

$$\epsilon(h_1,h_2) = \frac{f(h_1,h_2) - h_1 - h_2}{|h_1| + |h_2|} = \frac{-h_1 h_2 (h_1 + h_2)}{(|h_1| + |h_2|)(h_1^2 + h_2^2)}$$

Si l'on fait tendre $||h||$ vers 0 quand $h_1 = h_2$ on obtient

$$\epsilon(h_1,h_1) = \frac{-2h_1^3}{2|h_1|2h_1^2} = -\frac{h_1^3}{2|h_1|^3}$$

or la limite quand h_1 tend vers 0^+ est $-\frac{1}{2}$ et donc f n'est pas différentiable en ce point même si elle possède des dérivées partielles en ce point.

2.3 Gradient

Définition 3 *Soit f une fonction différentiable sur U un ouvert de $I\!R^n$, le vecteur suivant formé des dérivées partielles :*

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

est appelé le gradient de f.

Le gradient est utilisé en mécanique, en mécanique des fluides, en électrotechnique ainsi que dans de très nombreux domaines...

3 Différentiabilité des fonctions à valeurs vectorielles

Pour simplifier l'exposé de ce cours, nous prendrons $E = I\!R^n$ et $F = I\!R^m$ ainsi, on ne considérera que des espaces vectoriels réels.

Soit f une fonction à valeurs vectorielles définie sur des sous-espaces vectoriels de nombres réels soit $A \subseteq I\!R^n$ un ouvert, les valeurs de la fonction seront dans $I\!R^m$. En fait, tout se passe comme si nous avions m fonctions numériques définies de A dans $I\!R$, soit

$$x \to f(x) = \begin{cases} f_1(x_1,x_2,\cdots,x_n) \\ f_2(x_1,x_2,\cdots,x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1,x_2,\cdots,x_n) \end{cases}$$

3.1 Différentiabilité

Définition 4 *Soit $P = (p_1,\cdots,p_n)$ un point de $A \subseteq I\!R^n$, f est différentiable au point P si il existe une application linéaire -notée $u : I\!R^n \to I\!R^m$ -correspondant aussi à un opérateur linéaire mais qui n'est plus aussi simple que précédemment- telle que l'on ait :*

$$f(P+h) = f(P) + u(h) + ||h||\epsilon(h) \text{ avec } \lim_{||h|| \to 0} \epsilon(h) = 0$$

L'application linéaire u s'appelle alors la différentielle de f au point P et se note $df(a)$ ou $d_a f$.

f est dite de classe C^1 sur A si les fonctions composantes f_i sont de classe C^1 sur A; cad que les $n \times m$ dérivées partielles $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$,$i \in \{1,\cdots,m\}$,$j \in \{1,\cdots,n\}$ existent et sont, de plus, continues.

Remarque 4 *Attention, maintenant l'égalité $f(P+h) = f(P)+u(h)+...$ est une égalité vectorielle. Ceci différencie cette définition de celle pour les fonctions numériques qui n'est qu'un cas particulier avec $u(x) = L.x = \sum_{i=1}^{n} l_i x_i$, le . étant le produit scalaire entre L et x.*

3.2 Matrice Jacobienne

Définition 5 *Les $n \times m$ dérivées partielles misent sous forme matricielle de m lignes et n colonnes, donnent la matrice suivante :*

$$Jf(P) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Elle est appelée la matrice Jacobienne de f au point P.

3.3 Propriétés

La limite d'une fonction vectorielle s'étudiant à partir des limites des fonctions composantes, f est donc différentiable au point P si et seulement si ses m fonctionnelles f_i le sont.

Théorème 2 *Soit A un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et f une fonction de A à valeur dans $\mathbb{R}^m$.*

Si f est différentiable au point P, alors les dérivées partielles $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$ existent pour tout $i \in \{1,\cdots,m\}$ et pour tout $j \in \{1,\cdots,n\}$. La différentielle de f au point P est alors la matrice Jacobienne de f au point P.

Réciproquement, si f est de classe C^1 dans A alors f est différentiable en tout point de A.

Remarque 5 *Attention, on n'a pas une parfaite relation d'équivalence car la différentiabilité n'entraîne pas forcément le fait que f soit de classe C^1.*

3.4 Exemples sur les changements de repères

Exemple 5 *Soit $(O,\vec{i},\vec{j})$ le repère orthonormé du plan Euclidien et soit P un point de ce plan. Si l'on veut passer en coordonnées polaires, on pose :*

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

avec $r = \sqrt{x^2+y^2} = d(O,P)$ et $\theta = (\vec{i},\vec{OP})$ défini à $2k\pi$ près.

Le couple (r,θ) s'appellent les coordonnées polaires de P. Soit $U = \{r > 0, 0 < \theta < 2\pi\}$, U est un ensemble ouvert. L'application $f : (r,\theta) \to (x,y)$ a pour matrice Jacobienne :

$$Jf(P) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

Exemple 6 *Soit $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ le repère orthonormé de l'espace Euclidien et soit P un point de cet espace. Si l'on veut passer en coordonnées cylindriques, on pose :*

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

Soit P' la projection orthogonale par rapport à $\vec{k}$ de P sur le plan $(O,\vec{i},\vec{j})$. Ainsi, $r = d(O,P')$ et $\theta = (\vec{i},\vec{OP'})$ défini à $2k\pi$ près.

Le triplet (r,θ,z) s'appellent les coordonnées cylindriques de P. Soit $U = \{r > 0, 0 < \theta < 2\pi, z \in I\!R\}$, U est un ensemble ouvert. L'application $f : (r,\theta,z) \to (x,y,z)$ a pour matrice Jacobienne :

$$Jf(P) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemple 7 *Soit $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ le repère orthonormé de l'espace Euclidien et soit P un point de cet espace. Si l'on veut passer en coordonnées sphériques, on pose :*

$$\begin{cases} x = r\cos\phi\cos\theta \\ y = r\cos\phi\cos\theta \\ z = r\sin\phi \end{cases}$$

avec $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = d(O,P)$ et soit $P' = (r\cos\phi, r\sin\phi)$ la projection de P sur le plan $(O,\vec{i},\vec{j})$, ainsi $\theta = (\vec{i},\vec{OP'})$ et $\phi = (\vec{OP'},\vec{OP})$ tous les deux définis à $2k\pi$ près.

Le triplet (r,θ,ϕ) s'appellent les coordonnées sphériques de P. Soit $U = \{r > 0, 0 < \theta < 2\pi, 0 < \phi < 2\pi\}$, U est un ensemble ouvert. L'application $f : (r,\theta,\phi) \to (x,y,z)$ a pour matrice Jacobienne :

$$Jf(P) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi\cos\theta & -r\cos\phi\sin\theta & -r\sin\phi\cos\theta \\ \cos\phi\sin\theta & r\cos\phi\cos\theta & -r\sin\phi\sin\theta \\ \sin\phi & 0 & r\cos\phi \end{pmatrix}$$

3.5 Opérations sur les différentielles

Proposition 1 *Soit U un ensemble ouvert de $I\!R^n$, P un point de U et f une fonction de U dans $I\!R^m$. On a les trois propriétés suivantes :*

1. *Si f est constante dans U alors $df(P) = 0$.*
2. *Si f est la restriction à l'ensemble U d'une application linéaire de $I\!R^n$ dans $I\!R^m$, alors $df(P) = f$.*
3. *Si f et g sont différentiables au point P alors $f+g$ et λf avec $\lambda \in I\!R$ sont différentiables au point P.*

En considérant maintenant le cadre plus général des fonctions composées, on a :

Théorème 3 *Soient n,m,p trois entiers positifs non nuls.*

Soit f une application de $U \subseteq I\!R^n$ dans $V \subseteq I\!R^m$ et soit g une application de V dans $I\!R^p$; U et V étant deux ouverts.

Si f est différentiable en $P \in U$ et si g est différentiable en $f(P) \in V$ alors gof est différentiable en P et

$$d(gof)(P) = dg(f(P))odf(P)$$

Or la matrice d'une application linéaire composée est le produit matriciel dans cet ordre, soit :

$$J_P(gof) = J_{f(P)}g \times J_P f$$

En explicitant les termes on obtiendra :

$$\frac{\partial (gof)_i}{\partial x_j}(P) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial g_i}{\partial y_k}(f(P)).\frac{\partial f_k}{\partial x_j}(P), \forall j \in \{1,\cdots,n\}, \forall k \in \{1,\cdots,m\}, \forall i \in \{1,\cdots,p\}$$

En pratique, on retiendra les formules suivantes :

$$\frac{\partial (gof)_i}{\partial x_j} = \frac{\partial g_i}{\partial y_1} \times \frac{\partial y_1}{\partial x_j} + \frac{\partial g_i}{\partial y_2} \times \frac{\partial y_2}{\partial x_j} + \cdots + \frac{\partial g_i}{\partial y_m} \times \frac{\partial y_m}{\partial x_1}$$

avec les notations habituelles : $y_k = f_k(x)$.

Exemple 8 *Considérons une courbe paramétrée de* $I\!R^3$ *:*

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

On suppose que les fonctions x,y *et* z *sont dérivables sur un intervalle* I *de* $I\!R$, *et que leurs dérivées sont continues; cad ces fonctions sont de classe* C^1.

Soit U *un ouvert de* $I\!R^3$ *et* $f : U \to I\!R$ *une fonction de classe* C^1.

Alors la fonction $t \to F(t) = f(x(t),y(t),z(t))$ *est définie et dérivable sur* I *et l'on a :*

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

Dans le cas particulier où $n = m = p$, et où f est une application bijective de U dans V, deux ouverts de $I\!R^n$.

Définition 6 *On dit que* f *est un difféomorphisme de* U *sur* V *si et seulement si :*

1. f *est bijective de* U *sur* V,
2. f *est de classe* C^1 *sur* U,
3. $g = f^{-1}$ *est de classe* C^1 *sur* V.

Remarque 6 *Ce cas est celui du changement de variable dans le calcul des intégrales multiples.*

Théorème 4 *Si* f *est un difféomorphisme, la matrice Jacobienne de* f^{-1} *au point* $f(P)$ *est la matrice inverse de la matrice Jacobienne de* f *au point* P.

En effet : $M(fof^{-1}) = M(f) \times M(f^{-1}) = Id_{I\!R^n}$, *où* $Id_{I\!R^n}$ *est la matrice identité sur* $I\!R^n$.

Définition 7 *Si* f *est un difféomorphisme, on appelle Jacobien de* f *au point* P *le déterminant de la matrice Jacobienne de* f *au point* P.

Ce déterminant s'écrit :

$$\frac{Df}{Dx}(P) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(P) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(P) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(P) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(P) \end{vmatrix} = \frac{D(f_1,\cdots,f_n)}{D(x_1,\cdots,x_n)}(P)$$

Le Jacobien de f^{-1} au point $f(P)$ est égal à :

$$\frac{1}{\left(\frac{Df}{Dx}\right)(P)}$$

d'après les propriétés du calcul matriciel.

La composition des applications se traduit par la multiplication de leurs matrices Jacobiennes, et donc de leurs Jacobiens. D'où la formule utile pour les changements de variables dans les intégrales :

$$\frac{D(g_1,\cdots,g_n)}{D(x_1,\cdots,x_n)} = \frac{D(g_1,\cdots,g_n)}{D(y_1,\cdots,y_n)} \times \frac{D(y_1,\cdots,y_n)}{D(x_1,\cdots,x_n)}$$

si l'on pose comme d'habitude que $f(x_1,\cdots,x_n) = (y_1,\cdots,y_n)$.

Exemple 9 *Expression des dérivées partielles en coordonnées polaires et formules réciproques.*

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

définissent un difféomorphisme de l'ouvert $U = \{r > 0; 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$vers l'ouvert $V = \{(x,y) \in I\!R^2 \setminus \{(0,0)\}\}$.

Sa matrice Jacobienne est :

$$J_{(r,\theta)}(x,y) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{r} & -y \\ \frac{y}{r} & x \end{pmatrix}$$

et le Jacobien vaut :

$$\frac{D(x,y)}{D(r,\theta)} = r$$

4 Dérivation d'ordre supérieur

Par soucis de simplification, on ne considèrera, dans cette partie, que des fonctions numériques et qui sont définies de $I\!R^n$ dans $I\!R$.

4.1 Dérivées partielles d'ordre 2

Lorsque les dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ existent, se sont aussi des fonctions de plusieurs variables qui peuvent, à leur tour, avoir des dérivées partielles :

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)}{\partial x_j} \text{ se note } \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

Dans le cas où $i = j$, on a $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$; attention à cette notation : le chiffre 2 est après le ∂ au numérateur et après la variable x_i au dénominateur.

L'origine de cette notation est la même que pour les fonctions d'une seule variable :

$$\frac{d^2F}{dx^2}$$

Définition 8 *Une fonction f dont les dérivées partielles du second ordre sont continues, est dite de classe C^2. Il y a, a priori, n^2 dérivées partielles avec f définie de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.*

Théorème 5 *Ce théorème s'appelle le théorème de Schwartz.*

Si $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$ sont définies autour de d'un point de coordonnées (a,b),et si de plus, ces deux fonctions sont continues en (a,b). Alors,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b)$$

Ainsi l'ordre de dérivation n'a pas d'importance sous ces hypothèses de continuité.

Exemple 10 *Soit $f(x,y) = x^2y - 5xy^3$ une fonction polynomiale de deux variables définies et continue sur $\mathbb{R}^2$.*

Les dérivées partielles premières sont :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy - 5y^3 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 - 15xy^2$$

Les dérivées partielles secondes sont :

$$\begin{array}{ll} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2y & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 2x - 15y^2 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 2x - 15y^2 & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -30xy \end{array}$$

On vérifie bien sur cet exemple le théorème de Schwartz.

4.2 Dérivées partielles d'ordre supérieur à 2

Soit $(i_1, \cdots, i_k)$ une succession d'indices de $\{1, \cdots, n\}$, et soit f une fonction de plusieurs variables de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.

On définit par récurrence sur k :

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \cdots \partial x_{i_1}}$$

Définition 9 *Si $\dfrac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{i_{k-1}} \cdots \partial x_{i_1}}$ a une dérivée partielle par rapport à x_{i_k} alors :*

$$\frac{\partial}{\partial x_{i_k}} \left(\frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{i_{k-1}} \cdots \partial x_{i_1}} \right) \text{ est noté } \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \cdots \partial x_{i_1}}$$

Remarque 7 *Pour cette définition l'ordre des indices est important.*

Exemple 11

$$\frac{\partial^3 f}{\partial z \partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}\right)$$

ici $i_1 = 3, i_2 = 2$ *et* $i_3 = 3$.

Proposition 2 *Soient deux entiers non nuls* k *et* k', *alors si les dérivées partielles suivantes existent, elles sont aussi égales :*

$$\frac{\partial^{k'}}{\partial x_{i_{k+k'}} \cdots \partial x_{i_{k+1}}}\left(\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \cdots \partial x_{i_1}}\right) = \frac{\partial^{k+k'} f}{\partial x_{i_{k+k'}} \cdots \partial x_{i_1}}$$

Cette propriété est une propriété d'associativité des dérivées partielles.

Définition 10 *On dit que* f *est de classe* C^k *sur* $A \subseteq \mathbb{R}^n$ *si pour tout système de* k *indices* $(i_1, \cdots, i_k)$ *entre* 1 *et* n, *la dérivée partielle*

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \cdots \partial x_{i_1}}$$

existe sur A *et y est continue.*

Souvent on dit : soit f *une fonction* C^k *au lieu de soit* f *une fonction de classe* C^k.

Proposition 3 *Si* f *est de classe* C^k *alors* f *est aussi de classe* C^{k-1} *et par récurrence, de classe* C^{k-2} *jusqu'à* C^1.

Théorème 6 *Nous allons maintenant généraliser le théorème de Schwartz.*

Si f *est une fonction définie de* $A \subseteq \mathbb{R}^n$ *dans* $\mathbb{R}$, *et si de plus,* f *est de classe* C^k, *alors*

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \cdots \partial x_{i_1}} = \frac{\partial^k f}{\partial x_{j_k} \cdots \partial x_{j_1}}$$

avec $(j_1, \cdots, j_k)$ *une permutation quelconque des indices de* $(i_1, \cdots, i_k)$.

Cette propriété est la propriété de commutativité des dérivées partielles sous les hypothèses de continuité.

Remarque 8 *D'après ce théorème si* f *est de classe* C^k, *les dérivées partielles s'écrivent :*

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_n}^{k_n} \cdots \partial x_{i_1}^{k_1}}$$

avec $k_1 + k_2 + \cdots + k_n = k$.

Théorème 7 . *La somme de deux fonctions* C^k *est* C^k.
- *Le produit d'une fonction* C^k *par un scalaire (un nombre réel ici) est* C^k.
- *Le produit de deux fonctions* C^k *est* C^k.
- *Le quotient de deux fonctions* C^k *est* C^k, *quand le dénominateur est non nul.*
- *La composée de deux fonctions* C^k *est* C^k.

Définition 11 *Une fonctions est dite* C^∞ *si elle est* C^k *pour toutes les valeurs de* k *dans* $\mathbb{N}$. *Le théorème précédent est aussi valable pour les fonctions* C^∞.

Exemple 12 *. Les polynômes sont C^∞.*

. Les fractions rationnelle sont C^∞ aux points ou le dénominateur ne s'annule pas.

. La fonction $(x,y,z) \to \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ est C^∞ comme composition d'un polynôme (C^∞) et de la racine carrée qui est aussi C^∞.

. Les fonctions transandantales classiques $\log, \ln, \sin, e, ...$ sont C^∞ sur leur domaine de définition.

Remarque 9 *Souvent les fonctions rencontrées en physique sont de classe C^∞ ou sinon on les approche par des fonctions C^∞. Ainsi, on est quasiment toujours, en pratique, dans le cadre d'utilisation du théorème de Schwartz.*

4.3 Exercice sur les fonctions composées

Prenons un petit exemple pour illustrer la dérivation des fonctions composées.

Exemple 13 *Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$ et définie par : $f(x,y) = e^{xy^2}$.*

Supposons que x et y sont des fonctions d'une seule variable :

$$x(t) = t^2 \text{ et } y(t) = \sin t$$

On considère la fonction z d'une seule variable comme étant : $z(t) = f(x(t),y(t))$.

Calculons les dérivées d'ordre 1 et d'ordre 2 :

$$\begin{aligned} z'(t) &= \frac{\partial z}{\partial x}x'(t) + \frac{\partial z}{\partial y}y'(t) \\ &= y^2 e^{xy^2} 2t + 2xye^{xy^2}\cos t \\ &= \left(2t\sin^2 t + 2t^2 \sin t \cos t\right) e^{t^2 \sin^2 t} \\ &= 2t \sin t \left(\sin t + t \cos t\right) e^{t^2 \sin^2 t} \end{aligned}$$

On aurait pu dériver directement $z(t) = e^{xy^2} = e^{t^2 \sin^2 t}$.

Pour calculer $z''(t)$, il faut dériver $z'(t) = \frac{\partial z}{\partial x}x'(t) + \frac{\partial z}{\partial y}y'(t)$ par rapport à t. On va détailler le calcul du premier terme (le second est symétrique entre x et y) :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial z}{\partial x}x'(t)\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial t \partial x}.x'(t) + \frac{\partial z}{\partial x}.x''(t)$$

D'après le théorème de Schwartz ci-dessus, on obtient :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(z'(t)).$$

En prenant la valeur de $z'(t)$, on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial x}(z'(t)) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}x'(t) + \frac{\partial z}{\partial y}y'(t)\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}x'(t) + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}y'(t).$$

On effectuera exactement la même chose pour le second terme à dériver et l'on obtiendra le résultat suivant pour $z''(t)$:

$$
\begin{aligned}
z''(t) &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}x'^2(t) + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}x'(t)y'(t) + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}y'^2(t) + \frac{\partial z}{\partial x}x''(t) + \frac{\partial z}{\partial y}y''(t) \\
&= y^4 e^{xy^2} 4t^2 + 2(2xy^3 + 2y)e^{xy^2} 2t\cos t + (2x + 4x^2y^2)e^{xy^2}\cos^2 t + 2y^2 e^{xy^2} + 2xye^{xy^2}(-\sin t) \\
&= e^{xy^2}\left(4t^2\sin^4 t + 8t\cos t(\sin t + t^2\sin^3 t) + (2t^2 + 4t^4\sin^2 t)\cos^2 t + 2\sin^2 t(1 - t^2)\right)
\end{aligned}
$$

On obtient finalement :

$$
z''(t) = e^{t^2\sin^2 t}\left(4t^2\sin^4 t + 8t\cos t(\sin t + t^2\sin^3 t) + (2t^2 + 4t^4\sin^2 t)\cos^2 t + 2\sin^2 t(1 - t^2)\right)
$$

Comme exercice, vous pouvez vérifier cette solution en dérivant deux fois :

$$
z(t) = e^{t^2\sin^2 t}.
$$

5 Conclusion

Ce chapitre est uniquement centré sur la différentiabilité des fonctions de plusieurs variables. Nous avons abordé et traité les notions de fonctions à valeurs vectorielles.

Le chapitre suivant sera dédié à une application de la différentiabilité : l'optimisation de fonctions de plusieurs variables et à la notion de différentielles totales exactes.