Cours FPV - Semaine 1 : Métrique, Limite, Continuité et Dérivation Partielle de Fonctionnelles, et Introduction aux Fonctions à Valeurs Vectorielles

Frédéric Messine

1 Introduction

Dans ce cours, nous étudierons les fonctions qui dépendent de plusieurs variables. En effet, dans les sciences appliquées telles que la physique, on cherche à modéliser des phénomènes dépendant de plusieurs paramètres. Ainsi l'étude théorique de ces fonctions de plusieurs variables trouvera un cadre applicatif dans de très nombreux domaines.

Exemple 1 *Le volume d'un cône est $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$. Cette fonction "Volume" dépend de deux paramètres (variables) : le rayon r et la hauteur h. On a ainsi défini une fonction mathématique dépendant de deux variables r et h, soit :*

$$V(r,h) = \frac{1}{3}\pi r^2 h,$$

où V est une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. C'est une fonction à valeurs réelles mais de deux variables. On appellera par la suite les fonctions à valeurs réelles des fonctions numériques.

Ce premier chapitre est succinct et est orienté pour l'ingénieur. Il retrace les définitions et les propriétés essentielles à l'utilisation de ces outils mathématiques de manipulation des fonctions de plusieurs variables sans approfondir le cadre théorique de leur étude appelée "Topologie".
Dans un premier temps, par un soucis de simplification, seules les fonctions de plusieurs variables à valeurs réelles seront considérées. A la fin de ce chapitre, sont présentées les notions de limites et de continuité des fonctions de plusieurs variables à valeurs vectorielles. Il n'y aura pas d'exercices sur cette dernière partie, cependant il est important de bien comprendre les définitions de limite et de continuité dans ce cadre général pour le chapitre suivant sur la différentiabilité.

2 Utilisation de $\mathbb{R}^n$

Dans tout ce cours, nous nous intéresserons uniquement aux fonctions de $\mathbb{R}^n$. De plus, dans ce premier chapitre, nous ne considèrerons qu'aux fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.

$I\!R^n$ est l'ensemble des $n-$uplets de nombres réels. Sur cet ensemble, on sait définir des opérations comme par exemple la somme ou la multiplication par un scalaire : soient X et Y deux éléments de $I\!R^n$ et soit a un nombre réel, $X+Y$ et aX sont bien définis.

Un espace vectoriel de dimension n est en bijection avec $I\!R^n$ une fois qu'une base est choisie. La bijection est définie par :

$$(a_1,a_2,\cdots,a_n) \longrightarrow a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_1} + \cdots + a_n\vec{e_n}$$

Supposant la base fixée, à un vecteur $\vec{V}$, on associe ses coordonnées $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ qui est un élément de $I\!R^n$.
De la même manière, on peut effectuer un rapprochement avec les espaces affines (espace de points) grâce aux coordonnées des points dans une base fixée (les coordonnées sont des éléments de $I\!R^n$.

3 Distances et ouverts dans $I\!R^n$

Dans cette partie, nous allons définir des outils mathématiques tels que la distance qui donneront une métrique dans les sous-espaces de $I\!R^n$ que nous considérons dans ce cours.

3.1 Distance

Définition 1 *Etant donnés trois points P,Q et R de $I\!R^n$, on appelle distance toute application de $I\!R^n \times I\!R^n \longrightarrow I\!R$, notée d, qui vérifie les trois propriétés suivantes :*

1. $d(P,Q) = 0 \Longleftrightarrow P = Q$,
2. $d(P,Q) = d(Q,P)$,
3. $d(P,R) \leq d(P,Q) + d(Q,R)$, *appelée l'inégalité triangulaire.*

Cette définition généralise la définition de distance Euclidienne élémentaire :

$$d(P,Q) = PQ = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(p_i - q_i)^2} = ||\vec{PQ}||$$

où les p_i, resp. q_i, sont les composantes de P, resp. de Q.
Dans ce qui suit, on utilisera l'une des trois distances suivantes :

1. $d_1(P,Q) = \sum_{i=1}^{n} |p_i - q_i|$,
2. $d_2(P,Q) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(p_i - q_i)^2}$,
3. $d_\infty(P,Q) = \sup_{i\in\{1,\cdots,n\}} |p_i - q_i|$, est appelée la distance uniforme.

A titre d'exercice, vérifiez que d_1,d_2 et d_∞ sont bien des distances.
d_1 n'a pas de nom particulier.

3.2 Boules et pavés de $I\!R^n$

La définition d'une distance donne à l'espace $I\!R^n$ la notion d'*espace métrique*. Ceci permet de définir des notions de voisinages autour d'un point : étude des fonctions en un point et autour d'un point donné.

Définition 2 *On appelle boule ouverte, resp. boule fermée, de centre C et de rayon r l'ensemble des points M tels que $d(C,M) < r$, resp. $d(C,M) \leq r$. On notera $BO(C,r)$ la boule ouverte, resp. $BF(C,r)$ la boule fermée, de centre C et de rayon r.*

Il est assez exceptionnel que l'on s'intéresse à des boules de rayon nul. En général le rayon r sera strictement positif.

Ainsi, on a que :

$$\begin{aligned} BO(C,r) &= \{M \in I\!R^n / d(C,M) < r\} \\ BF(C,r) &= \{M \in I\!R^n / d(C,M) \leq r\} \end{aligned}$$

Remarque 1 *Dans les définitions de limite et de continuité, il sera indifférent d'utiliser une boule ouverte ou fermée. Ceci est du au fait que dans une boule ouverte, il existe toujours une boule fermée qui lui est incluse dedans; en diminuant le rayon de cette dernière.*

4 Fonctions numériques de plusieurs variables

Pour simplifier l'étude des fonctions de plusieurs variables, il est intéressant d'étudier d'abord les fonctions dépendant de plusieurs variables certes, mais dont la valeur est réelle. Le cas général des fonctions de plusieurs variables à valeurs vectorielles sera abordé dans le chapitre suivant.

4.1 Définition

Définition 3 *Une fonction numérique est une application de $D \subseteq I\!R^n$ à valeur dans $I\!R$. C'est à dire, qui à tout $n-$uplet $(x_1,\cdots,x_n)$ associe un réel $f(x_1,\cdots,x_n)$.*
On écrit :

$$\begin{array}{rccc} f: & D \subseteq I\!R^n & \longrightarrow & I\!R \\ & (x_1,\cdots,x_n) & \longrightarrow & f(x_1,\cdots,x_n) \end{array}$$

On emploie aussi dans ce cas le terme de fonctionnelle.

La fonction f n'est pas forcément définie sur tout $I\!R^n$. D définit ainsi son domaine de définition; i.e. l'ensemble des $n-$uplets pour lesquels la fonction f admet des valeurs ou a du "sens".

Exemple 2

$$f_1(x_1,x_2,x_3) = \sin(x_1) \times x_2^2 + e^{x_3}$$
$$f_2(x_1,x_2) = \frac{cos(x_1) + \ln(x_2)}{x_1^2}$$

Le domaine de définition de f_1 est évidemment $\mathbb{R}^3$ tout entier. Tandis que le domaine de définition de f_2 est plus restreint; $D_2 = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*_+$.
Avec $\mathbb{R}^*$ étant l'ensemble des réels non nuls et $\mathbb{R}^*_+$ l'ensemble des réels strictement positifs.

Remarque 2 *On peut volontairement restreindre l'étude de cette fonction sur un domaine particulier inclus dans le domaine de définition.*

4.2 Représentation graphique

La représentation graphique de fonctions numériques de plusieurs variables ne peut s'effectuer que lorsque $n = 1$ ou dans le cas où $n = 2$. Dans le cas où $n > 2$, on peut toujours fixer $n - 1$ ou $n - 2$ variables et ainsi étudier et représenter la fonction suivant 1 voire 2 paramètres. On obtient ainsi une famille de courbes qui permettent une étude graphique plus ou moins précise de la fonction.

- Cas $n = 1$, on se retrouve dans le cas simple de fonction d'une seule variable par exemple $\sin(\sqrt{x})$ avec $x \in [0,1000]$, cf le graphe Fig.1.

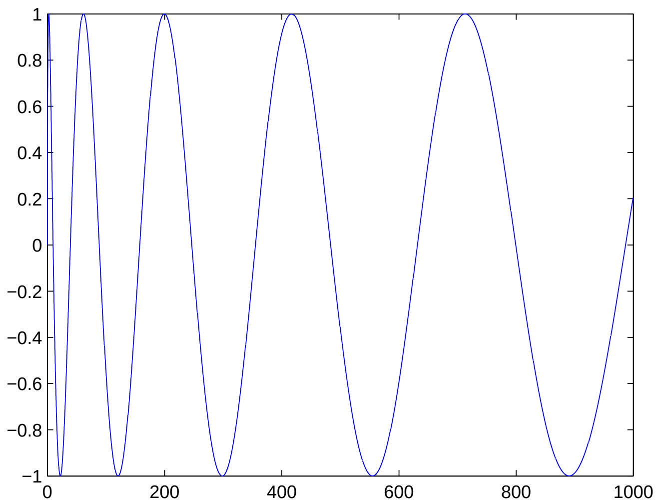

FIG. 1 – *Représentation graphique de* $\sin(\sqrt{x})$.

- Cas $n = 2$, on représente les courbes par des surfaces, par exemple $f(x_1,x_2) = \sin(x_1 \times x_2) - x_1^2 \times \ln(x_2)$ sur le domaine fixé $D = [-10,10] \times [\frac{1}{2},20]$, cf le graphe Fig.2.

5 Limite et continuité

Les définitions suivantes généralisent les définitions que vous connaissez pour les fonctions dépendant d'une seule variable.

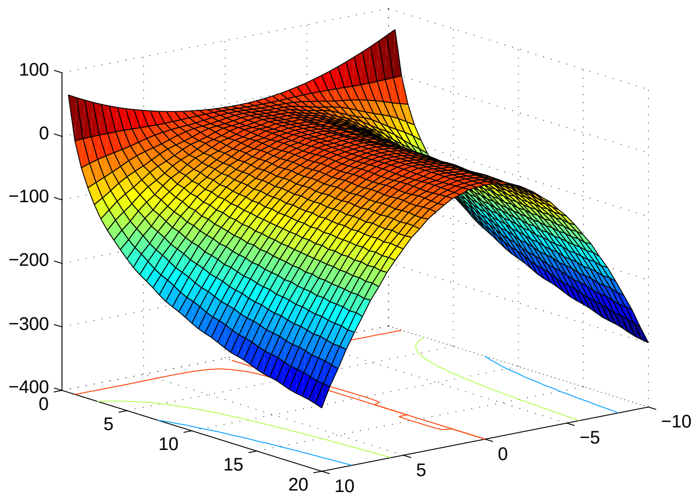

FIG. 2 – *Représentation graphique de* $f(x_1,x_2)$.

Dans ce qui suit f sera une fonction numérique (à valeurs réelles) définie sur un domaine $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Elle dépendra donc de n variables.

5.1 Limite

Définition 4 *On dit que la fonctionnelle f tend vers l (valeurs réelles) quand le point P tend vers le point Q (deux points de $\mathbb{R}^n$) si et seulement si*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall P \in D, d(P,Q) < \alpha \Longrightarrow |f(P) - l| < \epsilon$$

On fait tendre des points P du domaine de définition de la fonction D vers un point Q de $\mathbb{R}^n$ qui en principe n'appartient pas au domaine D; sinon la limite est simplement $f(Q)$. On s'aperçoit que cette définition de la limite ne dépend pas de la distance choisie. On pourra prendre indifféremment soit d_1,d_2 ou d_∞ (voire une autre distance non donnée dans ce cours).
En pratique et en notant $P = (p_1, \cdots, p_n)$ et $Q = (q_1, \cdots, q_n)$, on utilisera :

$$\lim_{P \to Q} f(P) = \lim_{\substack{p_1 \to q_1 \\ p_2 \to q_2 \\ \vdots \\ p_n \to q_n}} f(p_1, \cdots, p_n)$$

La notion de limite est très importante car toutes les définitions suivantes de continuité et de différentiabilité en dépendent directement.

On va maintenant illustrer cette définition de limite sur deux exemples qui serviront de base pour résoudre les exercices posés.

Exemple 3 *Soit la fonctionnelle suivante :*

$$f(x,y) = \frac{x^3 - 2y^3}{x^2 + y^2}$$

son domaine de définition est $\mathbb{R}^2 \setminus (0{,}0)$. *On va donc regarder la limite de cette fonction quand un point* P *de coordonnées* $(x{,}y)$ *tend vers l'origine* $O = (0{,}0)$.
L'idée pour résoudre cet exercice est de trouver un minorant et un majorant suffisamment précis pour que leurs limites coïncident et donc nous auront trouvé la limite de f. *Cette recherche de minorant et de majorant est très délicate à faire et demande un peu de pratique et d'intuition mathématique.*
Comme le dénominateur est de la forme x^2+y^2 *nous allons utiliser la distance euclidienne :* $d_2(P{,}O) = \sqrt{x^2+y^2}$. *On va maintenant essayer de majorer et de minorer le numérateur par* $k \times d(P{,}O)$, *à nous de trouver ces coefficients* k *si ils existent (cad si cette idée de résolution fonctionne).*
Considérons le numérateur $x^3 - 2y^3$ *un majorant est* $|x|^3 + 2|y|^3$, *il suffit maintenant d'utiliser le fait que* $|x| \leq \sqrt{x^2+y^2}$ *et de même que* $|y| \leq \sqrt{x^2+y^2}$. *En remplaçant, on a trouvé un majorant pour* f *:*

$$f(x{,}y) = \frac{x^3 - 2y^3}{x^2+y^2} \leq \frac{|x|^3 + 2|y|^3}{x^2+y^2} \leq \frac{(\sqrt{x^2+y^2})^3 + 2(\sqrt{x^2+y^2})^3}{x^2+y^2} \leq 3\sqrt{x^2+y^2}$$

On a ainsi un majorant dont la limite est facile à calculer en O *car cette fonction majorante est définie en* O; *soit* 0 *donc ce majorant :*

$$\lim_{P \to O} f(x{,}y) \leq \lim_{P \to O} 3\sqrt{x^2+y^2} = 0$$

Il nous reste à trouver un minorant dont la limite est aussi 0 *pour conclure que la limite de* f *est aussi* 0 *par encadrement.*
Cependant comme la limite est 0, *on peut plutôt travailler avec la valeur absolue de la fonction soit :*

$$|f(x{,}y)| = \frac{|x^3 - 2y^3|}{x^2+y^2}$$

On voit que l'on peut utiliser le même majorant et on a ainsi que

$$0 \leq \lim_{P \to O} |f(x{,}y)| \leq \lim_{P \to O} 3\sqrt{x^2+y^2} = 0$$

d'où f *a pour limite* 0 *au point* $O = (0{,}0)$ *(car* $-|f(x{,}y)| \leq f(x{,}y) \leq |f(x{,}y)|$*).*

Remarque 3 *Pour démontrer qu'une limite existe, il faut montrer qu'elle est la même quelle que soit la façon dont un point quelconque* P *du domaine de définition de* f *tend vers* Q *le point limite.*
Pour démontrer qu'une fonction n'a pas de limite en un point Q *il suffit de montrer que dans deux directions différentes dans le domaine de définition* D, *les deux valeurs limites sont distinctes.*

Exemple 4 *Soit la fonctionnelle :*

$$f(x{,}y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$$

son domaine de définition est $D = \mathbb{R}^2 \setminus (0{,}0)$. *On désire voir le comportement de cette fonction autour de l'origine* $O = (0{,}0)$.

Si on prend une direction $x = 0$ et que l'on regarde la fonction $f(0,y)$, on a bien évidemment dans cette direction que :

$$\lim_{y \to 0} f(0,y) = 0 \textit{ car la fonction vaut déjà } 0.$$

Si l'on prend une autre direction $x = y$, on obtient :

$$\lim_{x \to 0} f(x,x) = \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2} \neq 0$$

Comme ces deux limites ne coïncident pas dans ces deux directions, on conclut que f n'admet pas de limite en O.

Remarque 4 *Attention : si l'on avait étudier la direction suivante $y = 0$, on aurait aussi trouvé 0 comme limite et on aurait pu être tenter de conclure que la limite de cette fonction était 0. Cet exercice montre qu'il faut regarder la limite d'une fonction dans toutes les directions pour conclure que la limite existe.*

Remarque 5 *Soit $f(x,y)$ une fonctiuonnelle qui tend vers une limite l quand (x,y) tend vers un point (a,b). En restant dans le domaine de définition D et si les droites $x = a$ et $y = b$ sont dans ce domaine alors $\lim_{x \to a} f(x,b) = \lim_{y \to b} f(a,y) = l$. Attention : la réciproque est fausse.*

On va maintenant donner quelques extensions à cette définition de limite :

Définition 5 *On dit que f tend vers $+\infty$, resp. $-\infty$, quand P tend vers Q si et seulement si*

$$\forall A > 0, \exists \alpha > 0, \forall P \in D, d(P,Q) < \alpha \Longrightarrow f(P) > A, \textit{ resp. } f(P) < -A.$$

5.2 Continuité

Définition 6 *On dit que f est continue au point Q si et seulement si f est définie en Q et que $\lim_{P \to Q} f(P) = f(Q)$.*
On dit que f est continue sur tout un domaine $D \subseteq \mathbb{R}^n$ si et seulement si f est continue en tout point de D.

Remarque 6 *En pratique dans $\mathbb{R}^n$, toutes les applications décrites par "des formules" sont continues sur leur domaine de définition, car la combinaison de somme, de différence, de multiplication et de division ainsi que l'utilisation dans la formule des fonctions usuelles telles que $\sin, \cos, \ln, \cdots$ est une fonction continue sur le domaine de définition de la fonction considérée évidemment.*
En particulier les fonctions polynomiales et rationnelles (en faisant attention au domaine de définition) sont continues sur leur domaine de définition (tout $\mathbb{R}^n$ pour les polynômes).

En conséquence, les problèmes de continuité des fonctions de plusieurs variables se posent sur les points où l'on a une forme indéterminée.

Exemple 5 *Etudions la fonction suivante f sur $\mathbb{R}^2$:*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{(x+y)^4}{x^4+y^4} \textit{ si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 \textit{ sinon.} \end{cases}$$

D'après les théorèmes sur les compositions de fonctions continues, f est évidemment continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Qu'en est il en $(0,0)$?
Etudions le comportement de f sur la droite $y = x$, soit

$$f(x,x) = \frac{16x^4}{2x^4} = 8, \text{ quand } x \neq 0$$

donc, $\lim_{x\to 0} f(x,x) = 8 \neq 0$. Ainsi f n'est pas continue en $(0,0)$ car on a trouvé une direction dans laquelle la limite ne coïncidait pas avec la valeur de la fonction en ce point.

Exemple 6 *Etudions la fonction suivante f sur $\mathbb{R}^3$:*

$$f(x,y,z) = \begin{cases} \frac{xyz}{x^2+y^2+z^2} \text{ si } (x,y,z) \neq (0,0,0), \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

D'après les théorèmes sur les compositions de fonctions continues, f est évidemment continue sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$.
Etudions maintenant la continuité en $(0,0,0)$:
en utilisant les majorations suivantes $|x| \leq \sqrt{x^2+y^2+z^2}$,$|y| \leq \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ et $|z| \leq \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.
On a donc comme majorant :

$$|f(x,y,z)| \leq \frac{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

Or $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ est bien définie en $(0,0,0)$ et donc la limite de la fonction f est bien 0 et coïncide avec la définition de f en $(0,0,0)$. On en conclut que f est bien continue sur tout $\mathbb{R}^3$.

A partir de ces exemples, on comprend que si une fonction n'est pas définie en certains points, on va pouvoir la prolonger en la faisant coïncider avec les limites en ces points, si bien sûr ces limites existent.

Définition 7 *Soit f une fonction définie et continue sur D. Prenons un point Q n'appartenant pas à D. Si la limite de f est l en Q, on peut prolonger par continuité f en ce point Q en posant :*

$$f(P) = \begin{cases} f(P) \text{ si } P \neq Q, \\ l \text{ si } P = Q. \end{cases}$$

Exemple 7 *Soit $f(x,y)$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.*

$$f(x,y) = \frac{sin(xy)}{|x|+|y|}$$

En utilisant les majorants suivants $|\sin(u)| \leq |u|$, $|x| \leq |x|+|y|$ et $|y| \leq |x|+|y|$, on obtient :

$$|f(x,y)| \leq \frac{|x||y|}{|x|+|y|} \leq \frac{(|x|+|y|)^2}{|x|+|y|} \leq |x|+|y|$$

Donc, $f(x,y)$ tend vers 0 quand (x,y) tend vers $(0,0)$. On peut ainsi prolonger par continuité f en ce point $(0,0)$ en posant $f(0,0) = 0$. Ainsi f est maintenant définie et continue sur tout $\mathbb{R}^2$.

6 Dérivées partielles de fonction numérique

Dans cette partie nous allons voir les premières notions de dérivations des fonctions de plusieurs variables. Dans ce cas une fonction numérique f définie sur un domaine de définition D pourra être dérivée par rapport à chacune des variables dont elle dépend. Par exemple, en physique l'étude de mouvements des points dans l'espace $\mathbb{R}^3$ sont des fonctions dépendant des trois coordonnées spatiales (variables). Si l'on veut étudier la vitesse de ces mouvements, on étudie la dérivée première.

Définition 8 *Soit f une fonction numérique de $\mathbb{R}^n$ (dans $\mathbb{R}$). $P = (p_1,p_2,\cdots,p_n)$ un point où cette fonction est définie.*
La $i-$ème dérivée partielle de f au point P est la dérivée de la fonction d'une seule variable $x_i \in \mathbb{R}$ définie par $f(p_1,\cdots,p_{i-1},x_i,p_{i+1},\cdots,p_n)$ au point p_i. C'est à dire la dérivée au point p_i de la $i-$ème fonction partielle en P.
On note cette dérivée partielle :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(p_1,\cdots,p_n) = \lim_{h\to 0} \frac{f(p_1,\cdots,p_{i-1},p_i+h,p_{i+1},\cdots,p_n) - f(p_1,\cdots,p_{i-1},p_i,p_{i+1},\cdots,p_n)}{h}$$

Le vecteur composé de toutes les dérivées partielles est appelé le gradient de f :

$$\nabla f(P) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(P) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_i}(P) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(P) \end{pmatrix}$$

Remarque 7 *Attention : $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ est une notation mathématique qui signifie la dérivée partielle de f par rapport à la $i-$ème variable. Cela n'a rien à voir avec une division.*

Remarque 8 *Dans le cas de fonction d'une seule variable, la dérivée partielle en a devient simplement la dérivée de f en a :*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = f'(a)$$

Définition 9 *Lorsque les dérivées partielles d'une fonction existent et sont continues, on dit que f est de classe C^1 sur son domaine de définition.*

Exemple 8 *Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ de la manière suivante :*

$$f(x,y,z) = \ln(x^2 + 2y^2 + 3z^2)$$

Les dérivées partielles sont :

$$\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \frac{2x}{x^2+2y^2+3z^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = \frac{4y}{x^2+2y^2+3z^2} \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = \frac{6z}{x^2+2y^2+3z^2} \end{pmatrix}$$

Comme ces fonctions dérivées partielles sont continues sur l'ensemble ouvert $\mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,0)\}$, la fonction f est dite de classe C^1 sur cet ouvert.

7 Fonctions de plusieurs variables à valeurs vectorielles

Les fonctions numériques (ou fonctionnelles) sont un cas particulier des fonctions de plusieurs variables. Au travers de cette partie nous allons revoir les notions de continuité et de limite dans le cas général de fonctions vectorielles (cad à valeurs vectorielles).

7.1 Limite

Soient $(E,||.||_E)$ et $(F,||.||_F)$ deux espaces vectoriels normés. Soit A une partie non vide de E et Q un point adhérant à A.

Définition 10 *On dit qu'un point a est adhérant à un ensemble A si et seulement si toutes boules ouvertes centrées en a ont une intersection non-vide avec A.*
C'est à dire que a peut ne pas appartenir à A mais il en est forcément "excessivement rapproché".

Définition 11 *On dit que f a pour limite $S \in F$ (ou tend vers S) quand P tend vers Q en restant dans A si et seulement si*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall P \in A, ||P - Q||_E < \alpha \Longrightarrow ||f(P) - S||_F < \epsilon$$

On notera cette limite

$$\lim_{\substack{P \to Q \\ P \in A}} f(P) = S$$

lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté on ne notera pas $P \in A$ sous la limite.

7.2 Continuité

Définition 12 *Soit f une fonction définie sur une partie A de E, et soit un point Q de A.*
On dit que f est continue en Q si et seulement si,

$$\lim_{\substack{P \to Q \\ P \in A}} f(P) = f(Q)$$

soit

$$\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall P \in A, ||P - Q||_E < \alpha \Longrightarrow ||f(P) - f(Q)||_F < \epsilon$$

On dira que f est continue sur A (partie de E) lorsque f sera continue en tout point de A.

Remarque 9 *La composition de fonctions continues sur A (partie de E) est aussi une fonction continue. Ainsi la somme, la différence, la multiplication, la division (attention au domaine de définition)... de deux fonctions continues est aussi une fonction continue.*

Proposition 1 *Soient $(E,||.||_E)$,$(F,||.||_F)$ et $(G,||.||_G)$ trois espaces vectoriels de normes quelconques. Soient maintenant f une fonction continue de $A \subseteq E$ dans F et g une fonction continue de $f(A)$ dans G. Alors, la composition de f et g soit fog, est aussi une application continue de A dans G.*

Définition 13 *On peut prolonger f par continuité de la manière suivante :*
soit Q un point adhérant à A mais n'appartenant pas à A. Pour prolonger f en ce point Q, on prendra pour définition de f en Q,

$$f(Q) = \lim_{\substack{P \to Q \\ P \in A}} f(P).$$

7.3 Applications linéaires continues

Considérons maintenant des applications particulières : les applications linéaires et intéressons nous à leur continuité.
Soient $(E,||.||_E)$ et $(F,||.||_F)$ deux espaces vectoriels normés. Soit L une application linéaire de E dans F.
Cette application L est continue sur E si et seulement si il existe une constante $K \in \mathbb{R}$ telle que :

$$||L(x)||_F \leq K||x||_E, \forall x \in E.$$

Proposition 2 *Une conséquence de ce qui précède est que dans les espaces de dimensions finies tels que $\mathbb{R}^n$ toutes les applications linéaires sont continues.*

Remarque 10 *Cette partie du cours ne fera pas l'objet de questions lors des tests hebdomadaires et du test final. D'ailleurs, cette partie n'est pas agrémentée d'exercice, cependant il faut la comprendre pour comprendre la suite de ce cours.*

8 Conclusion

Dans ce premier cours, nous avons abordé plusieurs notions importantes des fonctions de plusieurs variables; à savoir limite, continuité, et dérivation partielle. Par un soucis de simplification uniquement les fonctions numériques, i.e. à valeurs réelles, sont considérées pour les différents types d'exercices. Cependant, pour le cours suivant, il est nécessaire de bien comprendre les définitions de limite et de continuité dans le cas général de fonctions vectorielles de plusieurs variables. Le chapitre qui suit porte sur la notion de différentiabilité de fonctions de plusieurs variables à valeurs réelles et aussi à valeurs vectorielles.

Ce premier cours n'est pas très compliqué à comprendre (les définitions étant relativement simples). Cependant la résolution des exercices qui se ramènent souvent à trouver des majorants et minorants assez précis est plus intuitive et demande une certaine pratique et expérience...