Changement de Variables dans les Intégrales Multiples

Frédéric Messine

8 novembre 2010

1 Introduction

Dans cette note de cours, nous aborderons les changements de variables dans les intégrales multiples.
Le changement de variables est un procédé qui consiste à remplacer des variables par de nouvelles. C'est une méthode très utilisée en analyse pour la résolution d'intégrales.

La première partie rappelle les notions de changement de variable dans le cas d'intégrales simples et ensuite nous verrons comment l'étendre au cas du changement de variable dans les intégrales multiples au moyen de la matrice Jaccobienne introduite au Chapitre 2 du cours sur les fonctions de plusieurs variables. Il faut juste retenir le théorème fondamental 2, qui vous sera utile par la suite.

2 Changement de Variable-Cas d'Intégrales Simples

Soit f une fonction C^1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, si l'on a

$$\int f'(x)dx$$

en posant $u = f(x)$ comme changement de variable l'on obtiendra:

$$\int du = [u]$$

D'où le si l'on considère $f(g(x))$ (avec g une fonction C^1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) l'on va avoir que

$$\int f'ogdg = \int d(fog) = [fog]$$

Ceci vient du théorème de la dérivation des fonctions composées.
Formalisons les principes énoncés ci-dessus:

Théorème 1 *Soit f une fonction continue de $D \subseteq \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et soit ϕ une fonction de classe C^1 de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$, et $Im(f) \subseteq D$, alors*

$$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)dx = \int_a^b f(\phi(t))\phi'(t)dt.$$

On va montrer dans la preuve que c'est basé sur la dérivation des fonctions composées.
Preuve:
Soit F une primitive de f sur D. On a que la fonction composée $Fo\phi$ est dérivable et la dérivée est:

$$(Fo\phi)' = (fo\phi) \times \phi'$$

D'où

$$\int_a^b f(\phi(t))\phi'(t)dt = \int_a^b ((fo\phi) \times \phi')(t)dt = \int_a^b (Fo\phi)'(t)dt = [Fo\phi]_a^b = F(\phi(b)) - F(\phi(a))$$

Et l'on a que

$$F(\phi(b)) - F(\phi(a)) = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)dx$$

Ce qui démontre bien notre théorème de changement de variable.

◊

Pour illustrer ce théorème, considérons l'exemple suivant:
Exemple 1 *Soit*

$$\int_{\sqrt{\pi}}^{2\sqrt{\pi}} 2x\cos(x^2)dx$$

on pose $u = x^2$ (attention u est en fait une fonction de x)et donc $du = 2xdx$. Comme x varie de $\sqrt{\pi}$ à $2\sqrt{\pi}$ on a u qui va varier de π à 4π (car $u = x^2$).
Ainsi on obtient que:

$$\int_{\sqrt{\pi}}^{2\sqrt{\pi}} 2x\cos(x^2)dx = \int_{\pi}^{4\pi} \cos(u)du = [\sin]_{\pi}^{4\pi} = \sin(4\pi) - \sin(\pi) = 0$$

On voit ainsi sur cet exemple l'utilité du changement de variable dans le calcul intégral. Cette utilité se retrouve également dans les changements de variables pour les intégrales multiples.

Remarque 1 *Utilisons maintenant notre théorème dans le cas où ϕ est monotone croissante ou décroissante sur $[a,b]$ (ce qui est très souvent le cas):*

- *ϕ est croissante sur $[a,b]$, alors $\phi(a) \leq \phi(b)$ et l'on retrouve l'égalité de notre théorème:*

$$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)dx = \int_a^b f(\phi(t))\phi'(t)dt.$$

- *ϕ est décroissante sur $[a,b]$, alors $\phi(b) \leq \phi(a)$ et l'on a $\phi'(x) \leq 0$ et donc:*

$$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)dx = -\int_{\phi(b)}^{\phi(a)} f(x)dx = \int_b^a -f(\phi(t))\phi'(t)dt = \int_a^b f(\phi(t))|\phi'(t)|dt.$$

Et donc dans les deux cas l'on a que

$$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)dx = \int_a^b f(\phi(t))|\phi'(t)|dt.$$

C'est cette dernière équation (avec la valeur absolue) qui va être utilisée pour généraliser au cas des intégrales multiples.

3 Changement de Variable-Cas d'Intégrales Multiples

Maintenant, soit f une fonction de plusieurs variables à valeur réelle, donc de $D \subseteq \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. Soit Φ une fonction bijective de classe C^1 ainsi que sa fonction réciproque Φ^{-1}. Soit $T \subseteq \mathbb{R}^n$ le domaine où Φ est définie et est C^1. On doit avoir $\Phi(T) \subseteq D$, c'est à dire que Φ est une fonction de plusieurs variables de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$. Ainsi par notations on a bien que $T \subseteq \mathbb{R}^n$, mais il peut ne pas être forcément un rectangle (changement en coordonnées polaires ou cf exemple ci-dessous), et de plus l'on a

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \phi_1(t) \\ \phi_2(t) \\ \vdots \\ \phi_n(t) \end{pmatrix}.$$

Ainsi $\Phi(T)$ va définir le domaine d'intégration.

Dans le cas particulier, où $n = 2$, on a le théorème suivant:
Théorème 2 *Avec les hypothèses sur f et sur Φ explicitées en début de ce paragraphe, l'on a:*

$$\int\int_{\Phi(T)} f(x,y)dxdy = \int\int_T f(\Phi(u,v))|\det(J_\Phi(u,v))|dudv$$

Où J_Φ est la matrice Jacobienne de la fonction Φ. Comme $n = 2$, Φ est une fonction de deux variables (ici u et v) et à valeur dans $\mathbb{R}^2$. Ainsi, sa matrice Jacobienne est de dimension 2×2. En fait, ce qui est nouveau ici est que l'on va prendre la valeur absolue du déterminant de cette matrice Jacobienne J_Φ.

Remarque 2 *Dans les cas simples on aura $\int\int_T = \int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2}$ et $\int\int_{\Phi(T)} = \int_{\phi_1(a_1)}^{\phi_1(b_1)}\int_{\phi_2(a_2)}^{\phi_2(b_2)}$, mais cela n'est pas toujours le cas, cf l'exemple suivant.*

Dans le cas général où $n \geq 2$, on obtient sensiblement le même théorème:
Théorème 3 *Avec les hypothèses sur f et sur Φ explicitées en début de ce paragraphe, l'on a:*

$$\int\cdots\int\int_{\Phi(T)} f(x)dx_1\cdots dx_n = \int\cdots\int\int_T f(\Phi(u))|\det(J_\Phi(u))|du_1\cdots du_n,$$

où $x = (x_1,\cdots,x_n)$ et $u = (u_1,\cdots,u_n)$.
A part des différences sur les notations, c'est le même théorême que précédemment.

On remarque que Φ bijective va remplacer ϕ dans les integrales simples et que $|\phi'|$ va devenir la valeur absolue du déterminant de la matrice Jacobienne de Φ.

Exemple 2 *Soit l'intégrale double suivante:*

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\pi} \sin(x+y) + \cos(x-2y)dxdy$$

L'idée est de poser $u = x+y$ et $v = x-2y$ dans le but de simplifier les calculs; même si l'on verra que ce n'est pas forcément le cas et que le calcul direct suivant est finalement assez *facile. Ceci est un exercice pour vous montrer comment cela marche sur un exemple qui a l'air simple mais qui ne l'est pas tant que cela; d'habitude, on vous pose le changement de variable à faire et tout vient assez naturellement et intuitivement car l'exercice est bien fabriqué par le professeur mais ce n'est pas toujours le cas dans la "vraie vie". Le but de cet exercice est d'éclairer certaines parties qui sont en général sous entendues: notamment comment l'on passe de* $\Phi(T)$ *connu (ici* $[0,\pi] \times [0,\frac{\pi}{2}]$*) à* T.

- *Résolution dans le cas direct:*

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\pi} \sin(x+y) + \cos(x-2y)dxdy \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} [-\cos(x+y)]_{x=0}^{x=\pi} + [\sin(x-2y)]_{x=0}^{x=\pi} dy \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\cos(\pi+y) + \cos(y) + \sin(\pi-2y) - \sin(-2y)dy \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos(y) + 2\sin(2y)dy \\
&= [2\sin(y)]_0^{\frac{\pi}{2}} - [\cos(2y)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2+2 = 4
\end{aligned}$$

On obtient finalement la valeur 4 *assez facilement.*

- *Changement de variable:*

On pose donc $u = x+y$ *et* $v = x-2y$ *et l'on a*

$$\Phi(T) = \begin{pmatrix} [0,\pi] \\ [0,\frac{\pi}{2}] \end{pmatrix}$$

On a en fait

$$\Phi(u,v) = \begin{pmatrix} \phi_1(u,v) \\ \phi_2(u,v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}u + \frac{1}{3}v \\ \frac{u-v}{3} \end{pmatrix}$$

D'où

$$f(\Phi(u,v)) = f(\frac{2}{3}u + \frac{1}{3}v, \frac{u-v}{3}) = \sin(u) + \cos(v)$$

et l'on retombe bien sur la simplification que l'on voulait avoir.

En appliquant le théorème du changement de variable, l'on obtient:

$$I = \int\int_T \sin(u) + \cos(v)|\det J_\phi(u,v)|dudv$$

Or on a:

$$J_\Phi(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial\phi_1}{\partial u} & \frac{\partial\phi_1}{\partial v} \\ \frac{\partial\phi_2}{\partial u} & \frac{\partial\phi_2}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

D'où,

$$|\det J_\Phi(u,v)| = \left|\frac{2}{3} \times \left(-\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{3} \times \frac{1}{3}\right| = \left|-\frac{1}{3}\right| = \frac{1}{3}$$

Et donc,

$$I = \frac{1}{3}\int\int_T \sin(u) + \cos(v)dudv$$

Jusque là c'est relativement simple mais assez difficile à formaliser. Maintenant il faut trouver T.
On a que $0 \leq x \leq \pi$ et $0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ et donc $0 \leq \frac{2}{3}u + \frac{1}{3}v \leq \pi$ et $0 \leq \frac{u-v}{3} \leq \frac{\pi}{2}$. A ce moment, on a le choix de faire varier u ou v et de voir les conséquences sur l'autre variable: ici (et en général) il vaut mieux choisir de fixer l'intégrale le plus en dehors et de rentrer dans les intégrales les plus internes (soit par rapport à v).
Donc faisons varier v le plus librement possible: $v = x - 2y$ donc comme $0 \leq x \leq \pi$ et $0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ on a que v peut varier de $-\pi$ (cas où $x = 0$ et $y = \frac{\pi}{2}$) à π (cas où $x = \pi$ et $y = 0$). Cependant cela va induire des bornes sur u qui vont dépendre de v car u et v sont liés par les inégalités $0 \leq \frac{2}{3}u + \frac{1}{3}v \leq \pi$ et $0 \leq \frac{u-v}{3} \leq \frac{\pi}{2}$. On transpose ici un domaine rectangulaire à un domaine qui est un losange et il faut intégrer sur ce losange.
On obtient:

$$-\frac{v}{2} \leq u \leq \frac{3\pi - v}{2} \text{ et } v \leq u \leq \frac{3\pi}{2} + v$$

Ainsi on obtient les bornes suivantes sur u:

$$\begin{aligned}
&\text{Si } v \geq 0, \text{ alors } v \leq u \leq \frac{3\pi}{2} - \frac{v}{2}, \\
&\text{Si } v \leq 0, \text{ alors } -\frac{v}{2} \leq u \leq \frac{3\pi}{2} + v,
\end{aligned}$$

On a donc,

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{3}\left\{\int_{-\pi}^{0}\int_{-\frac{v}{2}}^{\frac{3\pi}{2}+v} (\sin(u) + \cos(v))\,dudv + \int_{0}^{\pi}\int_{v}^{\frac{3\pi}{2}-\frac{v}{2}} (\sin(u) + \cos(v))\,dudv\right\} \\
&= \frac{1}{3}\left\{\int_{-\pi}^{0} [-\cos(u) + u\cos(v)]_{-\frac{v}{2}}^{\frac{3\pi}{2}+v} dv + \int_{0}^{\pi} [-\cos(u) + u\cos(v)]_{v}^{\frac{3\pi}{2}-\frac{v}{2}} dv\right\} \\
&= \frac{1}{3}\left\{\int_{-\pi}^{0} \left([-\cos(u) + u\cos(v)]_{-\frac{v}{2}}^{\frac{3\pi}{2}+v} dv + \int_{0}^{\pi} [-\cos(u) + u\cos(v)]_{v}^{\frac{3\pi}{2}-\frac{v}{2}}\right) dv\right\}
\end{aligned}$$

En effectuant le changement de variable $w = -v$ dans la première intégrale et en renomant w en v on réunit les deux intégrales de 0 à π:

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{3}\left\{\int_{0}^{\pi} \left([-\cos(u) + u\cos(-v)]_{\frac{v}{2}}^{\frac{3\pi}{2}-v} + [-\cos(u) + u\cos(v)]_{v}^{\frac{3\pi}{2}-\frac{v}{2}}\right) dv\right\} \\
&= \frac{1}{3}\left\{\int_{0}^{\pi} \left(-\cos\left(\frac{3\pi}{2} - v\right) + \left(\frac{3\pi}{2} - v\right)\cos v + \cos\left(\frac{v}{2}\right) - \frac{v}{2}\cos v\right.\right. \\
&\qquad \left.\left. -\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{v}{2}\right) + \left(\frac{3\pi}{2} - \frac{v}{2}\right)\cos v + \cos v - v\cos v\right) dv\right\} \\
&= \frac{1}{3}\left\{\int_{0}^{\pi} \left(-\sin(-v) + (3\pi + 1 - 3v)\cos v + \cos\frac{v}{2} - \sin\left(-\frac{v}{2}\right)\right) dv\right\} \\
&= \frac{1}{3}\left\{\int_{0}^{\pi} \left(-3(\sin v + v\cos v) + 4\sin v + (3\pi + 1)\cos v + \cos\frac{v}{2} + \sin\frac{v}{2}\right) dv\right\} \\
&= \frac{1}{3}\left\{-3[v\sin v]_0^\pi - 4[\cos v]_0^\pi + (3\pi + 1)[\sin v]_0^\pi + 2[\sin\frac{v}{2}]_0^\pi - 2[\cos\frac{v}{2}]_0^\pi\right\} \\
&= \frac{1}{3}\left\{0 - 4(-1 - 1) + 0 + 2(1 - 0) - 2(0 - 1)\right\} = 4
\end{aligned}$$

J'ai utilisé le fait que : (i) $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$, *(ii)* $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$, *(iii)* $\cos(\frac{3\pi}{2} + \alpha) = \sin \alpha$.

Je rappelle le but de l'exercice était surtout de voir les opérations de changement de variables et finalement pas de faire un calcul intégral plus simple dans ce cas. La difficulté majeure vient du changement de domaine de $\Phi(T)$ donné à T. Où $\Phi(T)$ est un rectangle et T est un losange d'où la difficulté de la définition du domaine.

Quand on passe de variables en coordonnées cartésiennes dans l'intégrale en coordonnées polaires, cela fait passer d'une intégration sur un rectangle à une intégration sur un disque et c'est plus simple car ρ et θ varieront séparément.