Troisième semaine de travail : Transformée de Fourier - Convolution

Exercices "Type 1" entièrement corrigés avec remarques et méthodologie.

Exercice 1

En utilisant les propriétés de dérivation de la TF, déterminer la TF de la fonction :

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

En déduire la valeur de l'intégrale :

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{u \cos u - \sin u}{u^3} \right) \cos ux \, du$$

Exercice 2. Etude la cellule RC

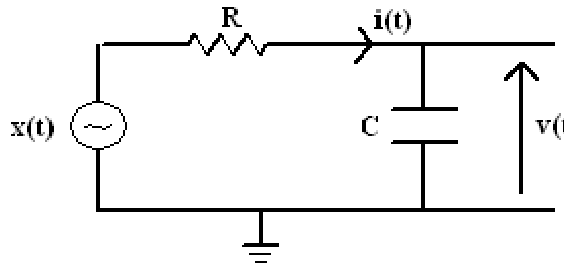

FIG. 1 – Schéma d'une cellule RC.

On considère le système constitué d'un générateur basse fréquence fournissant une tension d'entrée $x(t)$, d'une résistance R et d'un condensateur de capacité C. Le signal de sortie que l'on étudie est la tension $v(t)$ aux bornes du condensateur. On rappelle que la charge $q(t)$ du condensateur vaut $C\,v(t)$ et que l'intensité dans le circuit est donné par $i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$. D'autre part, les tensions vérifient l'égalité :

$$x(t) = v(t) + R\,i(t)$$

1- Donner l'équation différentielle vérifiée par $v(t)$.

2- En supposant que $x(t)$ est tel que $e^{\frac{t}{RC}}\,x(t)$ est intégrable sur $]-\infty, t]$, exprimer $v(t)$.

3- En posant

$$h(t) = \frac{1}{RC}\,e^{-\frac{t}{RC}}\,U(t)$$

où $U(t) = \mathbb{I}_{[0,+\infty[}(t)$, exprimer $v(t)$ comme un produit de convolution entre h et x.

Correction de l'exercice 1

f est intégrable (fonction bornée a support compact), nous pouvons donc calculer sa TF :

$$\widehat{f}(t) = TF\left(\left(1-x^2\right)\mathbb{I}_{[-1,1]}(x)\right)(t)$$

Par linéarité de la TF, nous pouvons écrire :

$$\widehat{f}(t) = TF\left(\mathbb{I}_{[-1,1]}(x)\right)(t) - TF\left(x^2\mathbb{I}_{[-1,1]}(x)\right)(t) \tag{1}$$

D'après les tables de transformées de Fourier, nous savons que :

$$TF\left(\mathbb{I}_{[-1,1]}(x)\right) = \frac{\sin 2\pi t}{\pi t}$$

Remarque 1 *Il est aisé de retrouver cette valeur par un calcul direct. La transformée de Fourier de la fonction porte ($\mathbb{I}_{[-1,1]}(x)$) est définie par :*

$$\begin{aligned} TF\left(\mathbb{I}_{[-1,1]}(x)\right)(t) &= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{I}_{[-1,1]}(x)\, e^{-2i\pi t x} dx \\ &= \int_{-1}^{+1} e^{-2i\pi t x} dx \\ &= \left.\frac{e^{-2i\pi t x}}{-2i\pi t}\right|_{-1}^{+1} = -\frac{e^{-2i\pi t} - e^{2i\pi t}}{2i\pi t} = \frac{\sin 2\pi t}{\pi t} \end{aligned}$$

En utilisant les formules liant TF et dérivation :

$$x^k f(x) \quad \xrightarrow{\mathcal{F}} \quad \frac{1}{(-2i\pi)^k}\frac{d}{d\lambda^k}\left(\widehat{f}(\lambda)\right)$$

nous déduisons (en prenant $k=2$) la transformée de Fourier du deuxième terme de (1) :

$$TF\left(x^2\mathbb{I}_{[-1,1]}(x)\right) = -\frac{1}{4\pi^2}\left(\widehat{\mathbb{I}_{[-1,1]}(x)}\right)''(t)$$

Soit :

$$\widehat{f}(t) = \frac{\sin 2\pi t}{\pi t} + \frac{1}{4\pi^2}\left(\frac{\sin 2\pi t}{\pi t}\right)''$$

Nous devons calculer la dérivée seconde de la transformée de Fourier de la fonction porte. Commençons par calculer la dérivée première, soit :

$$\begin{aligned} \left(\widehat{\mathbb{I}_{[-1,1]}(x)}\right)'(t) &= \left(\frac{\sin 2\pi t}{t}\right)' = \frac{(2\pi\cos 2\pi t)\,\pi t - \pi \sin 2\pi t}{\pi^2 t^2} \\ &= \frac{2\pi t\cos 2t\pi - \sin 2\pi t}{\pi t^2} = 2\frac{\cos 2\pi t}{t} - \frac{\sin 2\pi t}{\pi t^2} \end{aligned}$$

Dérivons cette dernière expression pour obtenir la dérivée seconde, soit :

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\sin 2\pi t}{t}\right)'' &= \left(2\frac{\cos 2\pi t}{t} - \frac{\sin 2\pi t}{\pi t^2}\right)' \\
&= 2\frac{-t2\pi \sin 2\pi t - \cos 2\pi t}{t^2} - \frac{2\pi^2 t^2 \cos 2\pi t - 2\pi t \sin 2\pi t}{\pi^2 t^4} \\
&= -4\pi\frac{\sin 2\pi t}{t} - 2\frac{\cos 2\pi t}{t^2} - 2\frac{\cos 2\pi t}{t^2} + 2\frac{\sin 2t\pi}{\pi t^3}
\end{aligned}$$

Finalement le calcul de la dérivée seconde donne :

$$\left(\frac{\sin 2\pi t}{\pi t}\right)'' = -4\pi\frac{\sin 2\pi t}{t} - 4\frac{\cos 2\pi t}{t^2} + 2\frac{\sin 2\pi t}{\pi t^3}$$

La transformée de Fourier pour $t \neq 0$ a donc pour expression :

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(t) &= \frac{\sin 2\pi t}{\pi t} + \frac{1}{4\pi^2}\left(-4\pi\frac{\sin 2\pi t}{t} - 4\frac{\cos 2\pi t}{t^2} + 2\frac{\sin 2\pi t}{\pi t^3}\right) \\
&= \frac{\sin 2\pi t}{\pi t} - \frac{\sin 2\pi t}{\pi t} - \frac{\cos 2\pi t}{\pi^2 t^2} + \frac{\sin 2\pi t}{2\pi^2 t^3} \\
&= -\frac{\cos 2\pi t}{\pi^2 t^2} + \frac{\sin 2\pi t}{2\pi^2 t^3}
\end{aligned}$$

Examinons le cas où $t = 0$:

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(0) &= \int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} \left(1 - x^2\right) \mathbb{I}_{[-1,1]}(x)\,dx \\
&= \int_{-1}^{1} \left(1 - x^2\right) dx \\
&= x - \frac{x^3}{3}\bigg|_{-1}^{+1} = \frac{4}{3}
\end{aligned}$$

Finalement, nous avons

$$\begin{cases} \widehat{f}(t) = -\frac{\cos 2\pi t}{\pi^2 t^2} + \frac{\sin 2\pi t}{2\pi^3 t^3} \\ \widehat{f}(0) = \frac{4}{3} \end{cases} \tag{2}$$

Remarque 2 *On pourrait plus classiquement utiliser la formule de définition de la TF*

$$\widehat{f}(t) = \int_{-1}^{+1} \left(1 - x^2\right) e^{-2i\pi t x} dx$$

C'est un bon exercice technique que d'effectuer ce calcul pour retrouver le résultat précédent. En terme de difficultés, les méthodes se valent, la calcul de la dérivée seconde précédente n'étant pas spécialement commode !

La fonction trouvé précédemment $\widehat{f}(t) = -\frac{\cos 2\pi t}{\pi^2 t^2} + \frac{\sin 2\pi t}{2\pi^3 t^3}$ est une fonction intégrable. En effet, il ne peut pas y avoir de problème en 0 car on sait que la transformée de Fourier d'une fonction intégrable est **continue** (Paragraphe 3.2 Prop. 3). On est donc sûr - et ceci sans calculs - que

$$\lim_{t\to 0}\left(-\frac{\cos 2\pi t}{\pi^2 t^2}+\frac{\sin 2\pi t}{2\pi^3 t^3}\right)=\frac{4}{3}$$

(A titre d'exercice, on peut vérifier ce résultat : pour celà utiliser les équivalents des sinus et cosinus au voisinage de 0).

Comme $f\in\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et $\widehat{f}\in\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, nous pouvons écrire (formule d'inversion de la TF *cf.* Paragraphe 3.5 Theo. 7 i)) :

$$f(x)=\int_{\mathbb{R}}\widehat{f}(t)\,e^{+2i\pi tx}dt \qquad \text{pour presque tout } x \text{ de } \mathbb{R}$$

De plus comme la fonction f est *continue*, l'égalité précédente est vraie **pour tout** x **réel** **(**Paragraphe 3.5 Theo. 7 ii))

Remplaçons $\widehat{f}$ dans la relation précédente par l'expression (2) :

$$f(x)=-\int_{\mathbb{R}}\left(\frac{\cos 2\pi t}{\pi^2 t^2}-\frac{\sin 2\pi t}{2\pi^3 t^3}\right)e^{2i\pi tx}\,dt \qquad \forall x\in\mathbb{R}. \tag{3}$$

Soit le changement de variable : $u=2\pi t\Longrightarrow dt=\frac{du}{2\pi}$, (3) devient :

$$f(x)=-\frac{2}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\frac{u\cos u-\sin u}{u^3}e^{iux}\,du \tag{4}$$

Prenons la partie réelle de (4), nous obtenons :

$$f(x)=-\frac{2}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\frac{u\cos u-\sin u}{u^3}\cos ux\,du$$

La fonction intégrée est paire, donc :

$$f(x)=-\frac{4}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{u\cos u-\sin u}{u^3}\cos ux\,du$$

soit :

$$\int_0^{+\infty}\frac{u\cos u-\sin u}{u^3}\cos ux\,du=-\frac{\pi}{4}f(x)$$

Correction de l'exercice 2

1- Nous partons de la relation liant les tensions :

$$x(t) = v(t) + R\,i(t) \tag{5}$$

et nous remplaçons i par son expression en fonction de v. Pour cela, nous nous intéressons au condensateur. Le courant est lié à la dérivée de la charge qui est exprimée linéairement en fonction de la tension, soit :

$$i\left(t\right) = \frac{dq}{dt}\left(t\right) = \frac{dCv}{dt}\left(t\right) = C\frac{dv}{dt}\left(t\right)$$

L'équation (5) devient donc :

$$x\left(t\right) = v\left(t\right) + RC\frac{dv}{dt}\left(t\right)$$

Soit :

$$\frac{dv}{dt}\left(t\right) + \frac{1}{RC}v\left(t\right) = \frac{1}{RC}x\left(t\right) \tag{6}$$

2- Résolvons cette équation différentielle. La méthode consiste, d'abord, à chercher la solution de l'équation homogène (c'est-à-dire sans second membre), soit :

$$\frac{dv}{dt}\left(t\right) + \frac{1}{RC}v\left(t\right) = 0 \tag{7}$$

La solution est de la forme :

$$v\left(t\right) = Ae^{-\frac{t}{RC}}$$

Pour obtenir l'ensemble des solutions de l'équation (7), nous considérons ensuite que la constante A dépend de la variable t (cette méthode s'appelle "variation de la constante"). Prenons donc :

$$v\left(t\right) = A\left(t\right)e^{-\frac{t}{RC}}$$

et injectons cette expression dans (6) :

$$\begin{aligned}
A'\left(t\right)e^{-\frac{t}{RC}} - \frac{A\left(t\right)}{RC}e^{-\frac{t}{RC}} + \frac{1}{RC}A\left(t\right)e^{-\frac{t}{RC}} &= \frac{1}{RC}x\left(t\right) \\
A'\left(t\right)e^{-\frac{t}{RC}} &= \frac{1}{RC}x\left(t\right) \\
A'\left(t\right) &= \frac{1}{RC}e^{\frac{t}{RC}}x\left(t\right)
\end{aligned}$$

Nous pouvons à présent calculer la valeur de A en intégrant le terme de droite, nous avons donc :

$$A\left(t\right) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{RC}e^{\frac{u}{RC}}x\left(u\right)du + B$$

Nous savons par hypothèses que $e^{\frac{t}{RC}}\,x(t)$ est intégrable sur $]-\infty, t]$, donc l'intégrale précédente existe. Nous devons déterminer la valeur de B. Considérons $t < 0 \Rightarrow x = 0$ et $v = 0$ car le système est causal. Donc : $A(t) = B$ et $v(t) = A(t)\,e^{-\frac{t}{RC}} = Be^{-\frac{t}{RC}} = 0$. Finalement nous obtenons :

$$B = 0 \Rightarrow A(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{RC} e^{\frac{u}{RC}} x(u)\,du$$

soit :

$$v(t) = e^{-\frac{t}{RC}} \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{RC} e^{\frac{u}{RC}} x(u)\,du$$

3- Il est possible de faire passer l'exponentielle sur t sous le signe intégrale puisqu'elle ne dépend pas de la variable d'intégration (u). Soit :

$$\begin{aligned} v(t) &= \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} e^{\frac{u}{RC}} x(u)\,du \\ &= \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{RC} e^{-\frac{t-u}{RC}} x(u)\,du \end{aligned}$$

Effectuons le changement de variable :

$$y = t - u \Leftrightarrow dy = -du$$

Les bornes d'intégrations deviennent : quand u vaut t, y vaut 0 et quand u tend vers $-\infty$, y tend vers $+\infty$. L'expression de v devient donc :

$$\begin{aligned} v &= -\int_{+\infty}^{0} \frac{1}{RC} e^{-\frac{y}{RC}} x(t-y)\,dy \\ &= \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{RC} e^{-\frac{y}{RC}} x(t-y)\,dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{RC} e^{-\frac{y}{RC}} U(y)\,x(t-y)\,dy \end{aligned}$$

Nous reconnaissons l'expression du produit de convolution entre la fonction x (l'excitation du système) et h (la réponse impulsionnelle du système)

$$h(t) = \frac{1}{RC}\, e^{-\frac{t}{RC}}\, U(t)$$

Donc :

$$v = h * x$$

Nous développons maintenant une *deuxième méthode* qui illustre bien l'intérêt d'utiliser conjointement la Transformée de Fourier et le Produit de Convolution. La lecture de cette méthode est hautement conseillée.

Revenons à l'équation différentielle que doit vérifier la tension et prenons la TF de chacun des termes. On fait ici un *calcul purement formel*, au moins dans un premier temps ! On suppose que les "bonnes propriétés" sont vérifiées permettant d'utiliser les différentes formules et transformations. L'idée est d'avoir grâce à ce calcul, la forme de la solution, quitte à revenir ensuite en arrière, pour vérifier que la fonction obtenue est bien solution et/ou possède les "bonnes propriétés".

En utilisant la formule de TF de la dérivée :

$$TF\left(v^{(k)}\right)(\lambda) = (2i\pi\lambda)^k TF(v)(\lambda)$$

nous obtenons :

$$2i\pi\lambda V(\lambda) + \frac{1}{RC}V(\lambda) = \frac{1}{RC}X(\lambda)$$

où V, resp. X, représente la transformée de Fourier de v, resp. x.

$$\begin{aligned} V(\lambda)\left(2i\pi\lambda + \frac{1}{RC}\right) &= \frac{1}{RC}X(\lambda) \\ V(\lambda)(1 + 2i\pi RC\lambda) &= X(\lambda) \\ V(\lambda) &= \frac{1}{1 + 2i\pi RC\lambda}X(\lambda) \end{aligned}$$

En regardant dans la table des transformées de Fourier, nous constatons que la fonction $\frac{1}{1+2i\pi RC\lambda}$ est la transformée de Fourier de $e^{-\frac{t}{RC}}U(t)$. $V(\lambda)$ s'écrit donc comme le produit de deux transformées de Fourier :

$$V(\lambda) = TF\left(\frac{1}{RC}e^{-\frac{t}{RC}}U(t)\right) \cdot TF(x(t)) = TF(h(t)) \cdot TF(x(t))$$

Comme les deux fonctions de la variable t appartiennent à $\mathcal{L}^1$, nous pouvons appliquer la relation liant TF et Convolution :

$$V = TF(h \star x)$$

Prenons la transformée de Fourier inverse, nous obtenons :

$$v(t) = (h \star x)(t) \quad \text{p.p.t.} x$$

Nous retrouvons bien la forme de la solution. En l'absence de la première méthose, on vérifierait maintenant que cette fonction $v(t) = (h \star x)(t)$ est dérivable pour tout t et qu'elle vérifie l'équation différentielle pour tout t dans $\mathbb{R}$ ce qui améliore le *presque partout* précédent !

Troisième semaine de travail : Transformée de Fourier - Convolution

Exercice "Type 2" avec notes et solutions.

Exercice 1

On pose

$$f(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} \cos(\lambda x)\, dx$$

1) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et solution d'une équation différentielle.

2) En déduire $f(\lambda)$ et montrer que ceci permet de calculer la transformée de Fourier de $g(x) = e^{-x^2}$.

Exercice 2.

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Calculer $f * f$

Exercice 1 : Indications et solutions

1- On applique le théorème de dérivation d'une intégrale dépendant d'un paramètre et on obtient

$$f'(\lambda) = -\int_{\mathbb{R}} x\, e^{-x^2} \sin(\lambda x)\, dx \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

On utilise l'intégration par parties

$$\begin{cases} u = \sin(\lambda x) & du = \lambda \cos(\lambda x)\, dx \\ dv = -x\, e^{-x^2} dx & v = \frac{1}{2} e^{-x^2} \end{cases}$$

et :

$$\left| \sin(\lambda x)\, \frac{1}{2} e^{-x^2} \right| \leq \frac{1}{2} e^{-x^2} \longrightarrow 0 \text{ quand } x \to \pm\infty$$

Finalement $f(\lambda)$ est solution de l'équation différentielle

$$f'(\lambda) = -\frac{1}{2} \lambda f(\lambda)$$

2) Cette équation différentielle a pour solution générale : $f(\lambda) = C\, e^{-\frac{\lambda^2}{4}}$. La constante s'obtient pour $\lambda = 0$ avec $C = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$ donc $f(\lambda) = \sqrt{\pi} e^{-\frac{\lambda^2}{4}} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$.
On part de $g(x) = e^{-x^2}$ et on calcule sa TF

$$\widehat{g}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} e^{-2i\pi\lambda x}\, dx$$

On identifie pour obtenir :

$$\widehat{g}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} \cos(2\pi\lambda x)\, dx = f(2\pi\lambda) = \sqrt{\pi} e^{-\pi^2 \lambda^2}.$$

Exercice 2 : Indications et solutions

Nous avons deux manières différentes pour calculer ce produit de convolution : le calcul direct ou le calcul par TF.

Calcul direct

$f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, donc la fonction $f * f$ appartient aussi à $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. On applique la définition du produit de convolution :

$$f * f\,(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f\,(x-u)\, f\,(u)\; du$$

On pourra utiliser le changement de variable :

$$t = -\frac{x}{2} + u \Longleftrightarrow dt = du$$

De plus, nous savons que $\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$, nous obtenons :

$$f * f\,(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{4}}$$

Calcul par TF

Comme $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$,nous avons :

$$\widehat{f * f} = \widehat{f}.\widehat{f} = \left(\widehat{f}\right)^2 \tag{8}$$

En utilisant les tables de TF, nous obtenons :

$$\widehat{f * f}\,(t) = e^{-4\pi^2 t^2}$$

Par transformée de Fourier inverse, nous trouvons finalement le produit de convolution :

$$f * f\,(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{4}}$$

Troisième semaine de travail : Transformée de Fourier

Exercice "Type 3" devoir.

Exercice 1.

1. Déterminer la transformée de Fourier de $f(x) = e^{-ax}U(x)$ où $U(x) = \mathbb{I}_{[0,\infty[}(x)$ et $a > 0$ est un paramètre fixé.
2. En utilisant les propriétés de dérivation de la TF, en déduire que la TF de la fonction $g(x) = x^{n-1}e^{-ax}U(x)$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ s'écrit

$$\widehat{g}(t) = \left(-\frac{1}{2i\pi}\right)^{n-1} \left(\widehat{f}\right)^{(n-1)}(t)$$

   où $\left(\widehat{f}\right)^{(n-1)}(t)$ désigne la dérivée d'ordre $n-1$ de $\widehat{f}$.
3. Calculer cette dérivée d'ordre $n-1$ de $\widehat{f}$ et en déduire la transformée de Fourier de

$$\frac{x^{n-1}e^{-ax}}{(n-1)!}U(x)$$

Exercice 2.

On cherche les fonctions à valeurs réelles, paires, continues sur $\mathbb{R}$ et intégrables sur $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\cos(2\pi xt)\, dx = \mathbb{I}_{[-1,1]}(t)\,(1-|t|) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

1. Montrer que ceci revient à chercher f vérifiant

$$\widehat{f}(t) = \mathbb{I}_{[-1,1]}(t)\,(1-|t|) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

2. En déduire que

$$f(x) = \frac{\sin^2 \pi x}{\pi^2 x^2} \quad \text{pour tout } x \text{ dans } R$$

3. En déduire très simplement la valeur de l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}^+} \frac{1-\cos 2\pi x}{x^2}\, dx = \pi$$

   On rapelle que $\sin^2 a = \frac{1-\cos 2a}{2}$