Première semaine de travail : Série de Fourier

QCM de cours

Ce QCM sert à vous autoévaluer sur votre assimilation du cours de la **semaine 1** sur les séries de Fourier. Il se compose de questions traitant des formules fondamentales du cours. Elles sont directement liées au cours et ne nécessitent pas de calcul.

1- Soit f une fonction périodique, de période a. Alors :

A - $f(x+a) = f(a)$
B - $f(x+\frac{a}{2}) = f(x)$
C - $f(x+a) = f(x)$

2- Soit la fonction $f(x) = \sin(\frac{4x}{\pi})$. Quelle est sa période :

A - 2π
B - $0.5\pi^2$
C - 0.5

3- Soit une fonction f périodique de période a. Les coefficients, c_n, de sa décomposition en série d'*exponentielles* s'écrivent

A - $\frac{2}{a}\int_0^{\frac{a}{2}} f(t) \exp\left(-2i\pi n\frac{t}{a}\right) dt$
B - $\frac{1}{a}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} f(t) \exp\left(-2i\pi n\frac{t}{a}\right) dt$
C - $\frac{1}{a}\int_0^{\frac{a}{2}} f(t) \exp\left(-2i\pi n\frac{t}{a}\right) dt$

4- Soit une fonction f périodique de période a. Les coefficients, a_n, $n \neq 0$, de sa décomposition en série *sinus-cosinus* s'écrivent

A - $\frac{2}{a}\int_0^{a} f(t) \cos\left(2\pi n\frac{t}{a}\right) dt$
B - $\frac{2}{a}\int_0^{a} f(t) \exp\left(2\pi n\frac{t}{a}\right) dt$
C - $\frac{2}{a}\int_0^{a} f(t) \sin\left(2\pi n\frac{t}{a}\right) dt$

5- Soit une fonction f périodique de période a. Le coefficient, a_0 de sa décomposition en série *sinus-cosinus* s'écrit

A - $\frac{1}{a}\int_0^{a} f(t) \cos\left(2\pi \frac{t}{a}\right) dt$
B - $\frac{1}{a}\int_0^{a} f(t)\, dt$
C - $\frac{1}{a}\int_0^{a} f(t) \sin\left(2\pi \frac{t}{a}\right) dt$

6- Soit une fonction f périodique de période a. Les coefficients, b_n de sa décomposition en série sinus-cosinus s'écrivent

A - $\frac{2}{a}\int_0^{a} f(t) \cos\left(2\pi n\frac{t}{a}\right) dt$
B - $\frac{2}{a}\int_0^{a} f(t) \exp\left(2\pi n\frac{t}{a}\right) dt$

C - $\frac{2}{a}\int_0^a f(t)\sin\left(2\pi n\frac{t}{a}\right)dt$

7- Soit f une fonction périodique *impaire*. Les coefficients de sa décomposition en série de Fourier en *sinus-cosinus* vérifient :

A - $a_n = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}$
B - $b_n = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$
C - $c_n = 0, \quad \forall n \in \mathbb{Z}$

8- Soit f une fonction périodique *réelle*. Les coefficients, c_n, de sa décomposition en série de Fourier en d'*exponentielles* vérifient :

A - $c_{-n} = c_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$
B - $c_{-n} = \overline{c_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$
C - $c_{-n} = -c_n, \quad \forall n \in \mathbb{Z}$

9- Soit f une fonction périodique *paire*. Les coefficients de sa décomposition en série de Fourier en *sinus-cosinus* vérifient :

A - $a_n = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}$
B - $b_n = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$
C - a_n et b_n réels, $\quad \forall n \in \mathbb{Z}$

10- Quelle relation existe-t-il entre les coéfficients de Fourier d'une fonction périodique quelconque, pour $n \geq 1$

A - $c_n = \frac{(a_n - ib_n)}{2}$
B - $c_n = \frac{(a_n + ib_n)}{2}$
C - $c_n = \frac{(a_n - b_n)}{2}$

11- L'égalité de Parseval, pour une fonction f périodique et de carré intégrable, nous dit que

A - $\frac{1}{a}\int_0^a |f(t)|^2 dt = \sum\limits_{n=0}^{\infty} |c_n|^2$
B - $\frac{1}{a}\int_0^a |f(t)| dt = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$
C - $\frac{1}{a}\int_0^a |f(t)|^2 dt = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$

12- Soit f une fonction définie sur un intervalle borné I de $\mathbb{R}$. Cette fonction sera dite $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur I si elle est continue par morceaux sur I et si :

A - f est dérivable sur I sauf sur un ensemble fini de points et de dérivee $\mathcal{C}^1$ par morceaux
B - f est dérivable sur I
C - f est dérivable sur I sauf sur un ensemble fini de points

13- Soit f une fonction de période a et $\mathcal{C}^1$par morceaux sur $[0, a]$. On a alors

A - $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{2i\pi n \frac{t_0}{a}} = \frac{1}{2}\left[f(t_{0+}) + f(t_{0-})\right] \qquad \forall t_0 \in \mathbb{R}$

B - $f(t_0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\left(f\right)\, e^{2i\pi n \frac{t_0}{a}} \qquad \forall t_0 \in \mathbb{R}$

C - Rien de particulier, il manque des hypothèses

QCM de cours : correction

Pour la plupart des questions, nous ne donnerons que la réponse exacte et le passage du cours qui correspond. Eventuellement, des remarques seront ajouter afin de préciser ou de mettre en valeur certains détails de la question posée.

1- C (page 1, paragraphe 1.1, definition 1)
2- B (page 1, paragraphe 1.1)
3- B (page 11, paragraphe 1.2.1)
4- A (page 11, paragraphe 1.2.1)
5- B (page 11, paragraphe 1.2.1)
6- C (page 11, paragraphe 1.2.1)
7- A (page 7, paragraphe 1.1)
8- B (page 6, paragraphe 1.1)
9- B (page 7, paragraphe 1.1)
10- A (page 3, paragraphe 1.1, equation 1.2)
11- C (page 16, paragraphe 1.2.3, proposition 5)

Remarque 1 *L'égalité de Parseval correspond à l'égalité de l'énergie : énergie du signal en temporel égale énergie du signal en fréquentiel. Comme il se doit pour des énergies, les expressions de part et d'autres sont* ***au carré*** *(expressions* ***quadratiques****). Dans la représentation en série de Fourier, il faut considérer toutes les harmoniques donc, dans l'écriture à partir des exponentielles, il faut sommer* n *de* $-\infty$ *à* $+\infty$.

12- A (page 13, paragraphe 1.2.2, definition 3)
13- A (page 14, paragraphe 1.2.2, théorème 1)

Remarque 2 *Les hypothèses de l'énoncé sont les hypothèses minimales du théorème de Dirichlet, la conclusion est que les sommes partielles convergent vers la moyenne arithmétique des valeurs de la fonction à droite et à gauche du point considéré. Si la fonction est* ***continue en*** t_o *alors on a :*

$$f(t_{0+}) = f(t_{0-}) = f(t_0) \text{ et } \frac{1}{2}\left[f(t_{0+}) + f(t_{0-})\right] = f(t_0)$$

L'affirmation ***A*** *se ramène à* ***B.*** *Pour avoir la réponse* ***B****, il faut une hypothèse supplémentaire : la continuité de la fonction* f *en tout point.*