Fiche Technique : Majorant - Minorant

Dans la première partie de cette fiche, nous allons mettre en évidence quelques techniques pour trouver un majorant ou un minorant d'une fonction donnée. Dans la deuxième partie, nous présenterons comment il est possible de vérifier si le majorant (resp minorant) trouvé est correct ou non.

1 Comment trouver un majorant ou minorant

Considèrons une fonction f définie sur un intervalle I. Comment peut-on trouver un majorant de cette fonction sur I. Il n'existe pas de méthode générale qui permette de trouver ce majorant (ou minorant).

Voici quelques pistes :

- utiliser des majorations classiques et faire une majoration "à la main"
- utiliser des propriétés particulières de la fonction, par example être bornée.

Nous verrons dans la suite quelques méthodes pour vérifier une majoration trouvées. Voici quelques possibilites :

- utiliser une étude de fonction
- utiliser des points particuliers ou des limites, argument souvent utiles pour *mettre en défaut* une majoration plutôt que pour *prouver* une majoration !

  On illustrera ces différentes techniques par des exemples.

Quelque soit la méthode utilisée, la connaissance d'un certain nombre de *majorations de base*, est indispensable.

1.1 Inégalités à connaître

- Fonctions trigonométriques :

$$\begin{array}{rcll} |\sin(x)| & \leq & 1 & \forall x \in \mathbb{R} \\ |\cos(x)| & \leq & 1 & \forall x \in \mathbb{R} \\ \sin^2(x) & \leq & |\sin(x)| & \forall x \in \mathbb{R} \\ \cos^2(x) & \leq & |\cos(x)| & \forall x \in \mathbb{R} \end{array}$$

- Fonctions puissances :

$$\begin{array}{ccccc} x^{\alpha} & \leq & x^{\beta} & 0 \leq \alpha \leq \beta & \forall x \geq 1 \\ x^{\beta} & \leq & x^{\alpha} & 0 \leq \alpha \leq \beta & 0 \leq x \leq 1 \\ \dfrac{1}{x^{\beta}} & \leq & \dfrac{1}{x^{\alpha}} & 0 \leq \alpha \leq \beta & \forall x \geq 1 \\ \dfrac{1}{x^{\alpha}} & \leq & \dfrac{1}{x^{\beta}} & 0 \leq \alpha \leq \beta & 0 \leq x \leq 1 \end{array}$$

- Fonction exponentielle :

$$e^x \geq 1 + x \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

- Fonction logarithme :

$$\ln(x) \leq x - 1 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^{+*}$$

- Fonction sinus-cardinal :

$$\sin_c(x) = \frac{\sin x}{x} \leq 1 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Mentionnons tout de suite, le majoration plus générale suivante :

$$|\sin_c(x)| = \left|\frac{\sin x}{x}\right| \leq 1 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

- Inégalité du triangle

$$|a + b| \leq |a| + |b| \quad \forall a, b \in \mathbb{R} \text{ ou même } \mathbb{C}$$

- Conséquence de l'inégalité du triangle

$$||a| - |b|| \leq |a - b| \quad \forall a, b \in \mathbb{R} \text{ ou même } \mathbb{C}$$

1.2 Majoration "à la main"

A partir des inégalités à connaître, il est possible de trouver une majoration "à la main". Voyons un exemple.

Considérons la fonction suivante :

$$f(x) = \frac{\sin x}{x\sqrt{x}} \quad \text{avec } x > 0$$

Quelle majoration de $|f(x)|$ peut-on obtenir avec les majorations classiques ?

1. Grâce à $|\sin(x)| \leq 1$, on a :

$$|f(x)| \leq \frac{1}{x\sqrt{x}} \quad \text{avec } x > 0$$

2. Grâce à $|\sin_c(x)| = \left|\frac{\sin x}{x}\right| \leq 1$, on a aussi :

$$|f(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{x}} \quad \text{avec } x > 0$$

3. En écrivant :

$$|f(x)| = \frac{\sqrt{|\sin x|}}{|x|}.\sqrt{\frac{|\sin x|}{|x|}} = \frac{\sqrt{|\sin x|}}{|x|}\sqrt{|\sin_c(x)|}$$

on a aussi

$$|f(x)| \leq \frac{\sqrt{|\sin x|}}{|x|} \leq \frac{1}{|x|} \quad \text{avec } x > 0$$

Toutes ces majorations sont exactes et selon les necessités, c'est l'une ou l'autre qui pourra être utile. Par exemple, si on étudie l'intégrabilité de f au voisinage de 0, c'est la deuxième inégalité qui permettra de conclure. L'intégrabilité au voisinage de $+\infty$ de cette même fonction s'appuiera sur la première (revoir les intégrales généralisées pour écrire en détail tout celà). Par contre, la dernière inégalité ne sera d'aucun utilité pour l'intégrabilité.

Ainsi dans ces problèmes de majoration, il faut avoir en tête l'objectif recherché !

1.3 Fonctions bornées

Par définition, une fonction bornée s'il existe deux réels M et m, tels que :

$$m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in I$$

Géométriquement, le graphe de la fonction f est compris entre les droites d'équation $y = M$ et $y = m$.

Supposons par exemple, que

$$-1 \leq f(x) \leq 3 \quad \forall x \in I$$

on a aussi

$$-3 \leq -1 \leq f(x) \leq 3 \quad \forall x \in I$$

et donc

$$-3 \leq f(x) \leq 3 \quad \forall x \in I$$

ce qui s'écrit encore

$$|f(x)| \leq 3 \quad \forall x \in I$$

Autre cas de figure :

$$-4 \leq f(x) \leq 2 \quad \forall x \in I$$

on a encore

$$-4 \leq f(x) \leq 2 \leq 4 \quad \forall x \in I$$

donc

$$-4 \leq f(x) \leq 4 \quad \forall x \in I$$

et

$$|f(x)| \leq 4 \quad \forall x \in I$$

Dans le cas général, prenons le plus grand - en valeur absolue - des nombres m et M, soit

$$K = \max(|m|, |M|)$$

en utilisant la suite d'inégralités

$$-K \leq -|m| \leq m \leq f(x) \leq M \leq |M| \leq K \quad \forall x \in I$$

on a

$$-K \leq f(x) \leq K \quad \forall x \in I$$

ou encore

$$|f(x)| \leq K \quad \forall x \in I$$

On a alors une définition plus commode des fonctions bornées : la fonction f est bornée sur I s'il existe un réel K tel que

$$|f(x)| \leq K \quad \forall x \in I$$

Par exemple, la fonction sinus cardinal : $\frac{\sin(x)}{x}$ est bornée puisque :

$$\left|\frac{\sin(x)}{x}\right| \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Cette inégalité n'est pas du tout évidente !.. se reporter à un livre de premier cycle pour la démonstration. Rappelons que $\frac{\sin(x)}{x}$ converge vers 1 quand x tend vers 0, donc on prolonge la fonction $\sin_c(x)$ *par continuité en* $x = 0$ en posant : $\sin_c(0) = 1$.

2 Techniques pour verifier ou prendre en défaut une majoration

Dans ce qui suit, nous avons listé trois méthode pour vous permettre de vérifier ou de prendre en défaut une majoration. Ce sont des outils utiles pour vous rassurer sur la majoration que vous avez trouver.

2.1 Etude de fonction

Montrer que

$$f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in I$$

équivaut à

$$f(x) - g(x) \leq 0 \quad \forall x \in I$$

on peut donc étudier le tableau de variation de la fonction

$$\varphi(x) = f(x) - g(x)$$

sur I.

Exemple 1 *Montrons de cette façon la majoration*

$$e^x \geq 1 + x \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

On étudie

$$h(x) = 1 + x - \exp(x)$$

sur $\mathbb{R}$ *et on va montrer qu'elle est toujours négative. On a :*

$$h'(x) = 1 - \exp(x)$$

Cherchons les valeurs de x *qui annule cette dérivée. Pour cela nous devons résoudre l'équation suivante :*

$$1 - \exp(x) = 0 \Longrightarrow \exp(x) = 1 \Longrightarrow x = 0$$

Lorsque $x < 0$, h' *est positive car* $\exp(x) \leq 1$. *Par contre, lorsque* $x > 0$, h' *est négative car* $\exp(x) \geq 1$. *Nous avons donc le tableau de variation suivant pour la fonction* h *:*

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
h	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

L'étude de la fonction h *montre que* h *est toujours négative ou nulle, nous avons donc*

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad h(x) \leq 0 \Longrightarrow f(x) - h(x) \leq 0 \Longrightarrow f(x) \leq h(x)$$

2.2 Mise en défaut d'une inégalité

Pour vérifier qu'une inégalité n'est pas exacte, l'une des techniques c'est de prendre des points particuliers.

Exemple 2 *Supposons que vous ayez trouver que :*

$$\forall x \in [0, \pi] \qquad \cos(x) \leq \sin(x)$$

Essayons de trouver un point x_0 *où* $\cos(x_0) \geq \sin(x_0)$.

Considùrons par exemple $x_0 = 0$. *Nous avons :*

$$\cos(x_0) = 1 \qquad et \qquad \sin(x_0) = 0$$

donc $\cos(x_0) \geq \sin(x_0)$. *On peut donc en conclure que la majoration n'est pas valide.*

Voici un autre exemple.

Exemple 3 *A-t-on*

$$e^x \geq x^\alpha \qquad \forall \alpha \geq 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^+$$

En passant au log elle équivaut à :

$$x \geq \alpha \ln x$$

Prenons $x = \alpha$*, elle devient* $\alpha \geq \alpha \ln \alpha$*, ce qui est faux si* $\ln \alpha > 1$ *c.à.d.* $\alpha > e$.

Exercice 4 *Montre alors en utilisant la technique précédente d'étude d'une fonction que :*

$$e^x \geq x^\alpha \qquad \forall \alpha \leq e \qquad \forall x \in \mathbb{R}^+$$

Indication : Etudier le sens de varaition de $\varphi(x) = x - \alpha \ln x$

Une autre technique, s'appuyant sur un raisonnement similaire à la méthode précédente, est d'utiliser la limite. Si la fonction g majore la fonction f sur $\mathbb{R}$, alors nous avons que

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) \leq \lim_{x \to \pm\infty} g(x)$$

Donc si la limite de f est supérieure à la limite de g, alors nous pouvons conclure que la majoration est fausse. Voyons l'example suivant.

Exemple 5 *Supposons que nous ayons trouvé la majoration suivante :*

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*} \qquad \ln\left(\sqrt{x}\right) \leq \frac{x}{x+5}$$

Considérons la limite en $+\infty$ *des deux termes de cette inégalité. Nous obtenons pour le membre de gauche*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \ln\left(\sqrt{x}\right) = +\infty$$

et pour le membre de droite

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x+5} = 1$$

Il est clair que la limte de f *est supérieure à la limite de* g*, donc la majoration n'est pas valable.*

3 Conclusion

Il est clair que l'étude de fonction est la méthode la plus générale pour vérifier si une majoration est correcte. Mais elle peut prendre du temps si la fonction à étudier est compliqué.

La deuxième méthode n'est intéressante que si un point où la majoration n'est pas valable est facile à identifier. Dans le cas où aucune point ne semble présenter un problème, cette méthode ne fonctionnera pas et risque de prendre beaucoup de temps.

La même remarque peut être faîtes pour la troisième méthode. Malgré leur limitation, ces deux méthodes, lorsque on a un peu d'expérience, peuvent s'avérer fort utile et peuvent sauver pas de temps et de stress.

L'idéal est de sensir quelle méthode est plus adaptée au problème considéré.