Introduction

Contrairement à la physique, qui s'intéresse à la structure microscopique de la matière, la mécanique et, plus particulièrement, la mécanique des milieux continus s'intéressent au comportement macroscopique des solides, des fluides ou de milieux plus complexes.

Cette modélisation de milieu continu nécessite de maitriser un certain nombre de notions algébriques sur la manipulation des champs scalaires, des champs de vecteurs ou encore des champs de tenseurs d'ordre deux qui seront identifiés ici à des matrices par le choix d'un repère orthonormé. Les notions d'algèbre tensorielle essentielles pour le présent cours de mécanique des milieux continus sont regroupées dans le chapitre 1.

La justification de la modélisation des milieux par des champs continus et dérivables est effectuée au chapitre 2 où l'on introduit la notion de loi de conservation d'une grandeur physique sur l'exemple de l'énergie interne. On montre que l'existence de telles lois implique l'existence d'un vecteur flux pour modéliser les phénomènes de courte portée agissant sur des distances microscopiques plus courtes que les échelles considérées commes infinitésimales par la modélisation continue.

Pour pouvoir relier les efforts aux variations locales de longueurs, d'angles ou de volumes, on modélise les déformations des milieux par des applications de l'espace au chapitre 3. La différentielle d'une telle application permet de décrire la transformation des longueurs, des angles ou des volumes. L'accent est mis sur les petites déformations dans la mesure on l'on n'aborde pas, dans ce cours, la rhéologie des grandes déformations.

Le chapitre 4 énonce la loi de conservation de la masse et le principe fondamental de la dynamique dans le cadre des petites pertubations. Les efforts sont ici modélisés par leur résultante et leur moment sur tous les sous-domaines du milieu. La loi de conservation de la quantité de mouvement permet de démontrer l'existence d'un tenseur flux de quantité de mouvement nommé tenseur des contraintes. La loi de conservation du moment cinétique permet de démontrer que ce tenseur est symétrique.

Une première application du principe fondamental est exposée au chapitre 5 pour la loi de comportement des solides élastiques homogènes et isotropes en petites perturbations appellée loi de Hooke. Les petites oscillations de tels solides sont régies par les équations de Lamé dont les solutions sont la superposition d'ondes élastiques longitudinales ou transversales. On calcule les vitesses de propagation de ces ondes.

Le chapitre 6 aborde l'étude du mouvement à l'aide d'une description eulérienne plus appropriée pour la modélisation des écoulements fluides. Les notations de dérivée particulaire, de transport de petits vecteurs ou encore de tenseur des taux de rotations et de déformations sont explicitées. On s'intéresse ici aux taux de variations des longueurs, des angles ou des volumes.

Le chapitre 7 complète les outils mathématiques en dérivant par rapport au temps des intégrales triples dont le domaine d'intégration est transporté par le mouvement. Ces outils permettent de formuler les équations de bilan qui constituent les axiomes de la mécanique des milieux continus. C'est le cas du principe fondamental de la dynamique généralisé ici au cas des mouvements de déformations quelconques.

Le chapitre 8 ouvre le champ de la mécanique des fluides en formulant la rhéologie des fluides newtoniens. Dans le cas compressible, la dynamique est alors couplée à la thermodynamique à travers le champ de pression. Il convient alors de postuler le "théorème" de l'énergie cinétique pour obtenir l'expression de la puissance des efforts intérieurs, puis d'énoncer le premier principe de la thermodynamique sous forme d'une équation de bilan pour l'énergie interne. On regroupe alors les lois de conservation et équations de bilan essentielles dans le système des équations de Navier-Stokes en détaillant les types de conditions aux limites nécessaires pour les résoudre. L'étude des ondes sonores permet d'appréhender l'approximation de fluide incompressible comme étant la limite des très petits nombres de Mach.

L'objectif de ce cours est donc de maitriser les étapes qui relient les axiomes de base de la mécanique, les lois de comportement et les équations d'états aux deux équations d'évolution que sont :

— les équations de Lamé pour les solides élastiques,
— les équations de Navier-Stokes pour les fluides newtoniens.

Ce cours ouvre vers des études plus approfondies de l'élasticité linéaire et de la mécanique des fluides.