Formulaire du cours de Mécanique des Milieux Continus

Olivier THUAL, 1er juillet 2019

Ce formulaire est associé au polycopié de cours que l'on peut consulter sur les plateformes suivantes :

- Moodle N7 (http ://moodle-n7.inp-toulouse.fr/course/view.php ?id=7)
- O. Thual, Mécanique des Milieux Continus, *Éd. Ress. Pédago. Ouv. INP* **1018** (2012) 48h (http ://pedagotech.inp-toulouse.fr/121018)

1 Algèbre linéaire et tenseurs

Identification entre tenseurs et matrices

On identifie les vecteurs $\underline{u}$ de l'espace euclidien E aux matrices colonne 3×1 dans la base orthonormée $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$:

$$\boxed{\underline{u} \cdot \underline{v} = {}^t\underline{u}\; \underline{v} \; , \qquad \underline{\underline{A}} \cdot \underline{u} = \underline{\underline{A}}\, \underline{u} \; , \qquad \underline{u} \cdot \underline{\underline{C}} \cdot \underline{v} = {}^t\underline{u}\; \underline{\underline{C}}\; \underline{v} \; , \qquad \underline{u} \otimes \underline{v} = \underline{u}\; {}^t\underline{v} \; .}$$

Convention d'Einstein

Dans la base orthonormée $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$, les indices répétés sont sommés de 1 à 3 :

$$\boxed{\underline{u} \cdot \underline{v} = u_j\, v_j \; , \quad \underline{\underline{A}} \cdot \underline{u} = A_{ij}\, u_j\, \underline{e}_i \; , \quad \underline{u} \cdot \underline{\underline{C}} \cdot \underline{v} = u_i\, C_{ij}\, v_j \; , \quad \underline{u} \otimes \underline{v} = u_i\, v_j\, \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \; .}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}} = A_{il}\, B_{lj}\, \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \; , \quad \underline{\underline{A}} : \underline{\underline{B}} = A_{ij}\, B_{ji} = \mathrm{tr}\,(\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}}) \; , \\ \underline{u} \wedge \underline{v} = \epsilon_{ijk}\, u_j\, v_k\, \underline{e}_i \; , \quad (\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}) = \epsilon_{ijk}\, u_i\, v_j\, w_k \; . \end{array}}$$

Décompositions de tenseurs

Les décompositions "symétrique-antisymétrique" et "sphérique-déviatorique" sont uniques :

$$\boxed{\begin{array}{c} \underline{\underline{K}} = \underline{\underline{\Omega}} + \underline{\underline{D}} \quad \text{avec} \quad \underline{\underline{\Omega}} = \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{K}} - {}^t\underline{\underline{K}}\right) \quad \text{et} \quad \underline{\underline{D}} = \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{K}} + {}^t\underline{\underline{K}}\right) \; . \\ \underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}^{(s)} + \underline{\underline{\sigma}}^{(d)} \quad \text{avec} \quad \underline{\underline{\sigma}}^{(s)} = \frac{1}{3}\mathrm{tr}\,(\underline{\underline{\sigma}})\, \underline{\underline{I}} \quad \text{et} \quad \underline{\underline{\sigma}}^{(d)} = \underline{\underline{\sigma}} - \frac{1}{3}\mathrm{tr}\,(\underline{\underline{\sigma}})\, \underline{\underline{I}} \; . \end{array}}$$

Opérateurs de dérivation

Les champs scalaires $B(\underline{x})$, de vecteurs $\underline{V}(\underline{x})$ ou de tenseurs d'ordre deux $\underline{\underline{A}}(\underline{x})$, dérivables dans un espace affine d'origine O dont les points M sont décrits par les vecteurs $\underline{x} = \underline{OM}$ dans le repère $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$, vérifient :

$$\underline{\mathrm{grad}}\; B = \frac{\partial B}{\partial x_i}\, \underline{e}_i = B_{,i}\, \underline{e}_i \;, \quad dB = \underline{\mathrm{grad}}\; B(\underline{x}) \cdot \underline{dx} \;,$$

$$\mathrm{div}\; \underline{V} = V_{j,j} \;, \quad \Delta B = \mathrm{div}\; (\underline{\mathrm{grad}}\; B) = B_{,jj} \;, \quad \underline{\mathrm{rot}}\; \underline{V} = \epsilon_{ijk}\, V_{k,j}\, \underline{e}_i \;.$$

Différentielle d'un champ de vecteurs

La différentielle en $\underline{x}$ d'un champ de vecteur $\underline{V}(\underline{x})$ est la Jacobienne en $\underline{x}$ de l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ qui à $\underline{x}$ associe $\underline{V}(\underline{x})$:

$$\underline{\underline{\mathrm{grad}}}\; \underline{V} = V_{i,j}\; \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \;, \quad d\underline{V} = \underline{\underline{\mathrm{grad}}}\; \underline{V}(\underline{x}) \cdot \underline{dx} \;, \quad \Delta \underline{V} = \underline{\mathrm{div}}\; (\underline{\underline{\mathrm{grad}}}\; \underline{V}) \;.$$

Théorème de dérivation

L'utilisation de la convention de sommation d'Einstein permet de retrouver facilement les règles usuelles de dérivation de produit comme par exemple :

$$\underline{\mathrm{grad}}\; (B\, B') = B\; \underline{\mathrm{grad}}\; B' + B'\; \underline{\mathrm{grad}}\; B \;, \quad \mathrm{div}\; (B\, \underline{V}) = \underline{\mathrm{grad}}\; B \cdot \underline{V} + B\, \mathrm{div}\; \underline{V} \;,$$

$$\underline{\mathrm{div}}\, (\underline{U} \otimes \underline{V}) = \underline{\underline{\mathrm{grad}}}\; \underline{U} \cdot \underline{V} + (\mathrm{div}\; \underline{V})\; \underline{U} \;, \quad \underline{\mathrm{rot}}\; (\underline{\mathrm{rot}}\; \underline{V}) = \underline{\mathrm{grad}}\; (\mathrm{div}\; \underline{V}) - \Delta \underline{V} \;.$$

Pour tout sous-domaine de frontière $\partial\mathcal{D}$ et de normales $\underline{n}$ dirigées vers l'extérieur, la formule de la divergence pour les champs $\underline{Q}(\underline{x})$ ou $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x})$ s'écrit :

$$\iint_{\partial\mathcal{D}} \underline{Q} \cdot \underline{n}\, dS = \iiint_{\mathcal{D}} \mathrm{div}\; \underline{Q}\; d^3x \;\Leftrightarrow\; \iint_{\partial\mathcal{D}} Q_j\, n_j\, dS = \iiint_{\mathcal{D}} \frac{\partial Q_j}{\partial x_j}\; d^3x \;,$$

$$\iint_{\partial\mathcal{D}} \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}\, dS = \iiint_{\mathcal{D}} \underline{\mathrm{div}}\; \underline{\underline{\sigma}}\; d^3x \quad \Leftrightarrow \quad \iint_{\partial\mathcal{D}} \sigma_{ij}\, n_j\, dS = \iiint_{\mathcal{D}} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}\; d^3x \;.$$

Coordonnées curvilignes

Les coordonnées cylindriques considèrent la base $[\underline{e}_r(\theta), \underline{e}_\theta(\theta), \underline{e}_z]$ et le vecteur $\underline{x} = r\, \underline{e}_r(\theta) + z\, \underline{e}_z$ avec

$$\underline{e}_r = \cos\theta\, \underline{e}_x + \sin\theta\, \underline{e}_y \quad \text{et} \quad \underline{e}_\theta = -\sin\theta\, \underline{e}_x + \cos\theta\, \underline{e}_y \;.$$

Les coordonnées sphériques considérent la base $[\underline{e}_r(\varphi,\theta), \underline{e}_\theta(\varphi,\theta), \underline{e}_\varphi(\varphi,\theta)]$ et le vecteur $\underline{x} = r\, \underline{e}_r(\varphi,\theta)$ avec :

$$\underline{e}_r(\varphi,\theta) = \sin\theta\; (\cos\varphi\, \underline{e}_x + \sin\varphi\, \underline{e}_y) + \cos\theta\, \underline{e}_z \;,$$

$$\underline{e}_\theta(\varphi,\theta) = \cos\theta(\cos\varphi\, \underline{e}_x + \sin\varphi\, \underline{e}_y) - \sin\theta\, \underline{e}_z$$

$$\text{et} \quad \underline{e}_\varphi(\varphi,\theta) = -\sin\varphi\, \underline{e}_x + \cos\varphi\, \underline{e}_y \;.$$

Pour les coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques, il convient d'exprimer, dans les bases correspondantes, les champs :

$$\boxed{d\underline{x}\ , \quad dB\ , \quad \underline{\mathrm{grad}}\ B\ , \quad d\underline{V}\ , \quad \underline{\underline{\mathrm{grad}}}\ \underline{V}\ , \quad \mathrm{div}\ \underline{V}\ , \quad \Delta B\ , \quad \Delta \underline{V} \quad \text{et} \quad \mathrm{div}\ \underline{\underline{\sigma}}\ .}$$

2 Hypothèse du continu

Linéarité du flux

Un bilan faisant intervenir la densité $c(\underline{x}, t)$ d'une grandeur $\mathcal{C}(\mathcal{D}, t)$, sur tout sous-domaine fixe, $\mathcal{D}$ implique la linéarité du flux surfacique $q_c(\underline{x}, \underline{n}, t)$ par rapport à la normale sortante $\underline{n}$:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left[\iiint_{\mathcal{D}} c(\underline{x}, t)\ d^3x\right] + \iint_{\partial\mathcal{D}} q_c(\underline{x}, \underline{n}, t)\ dS = 0 \implies q_c(\underline{x}, \underline{n}, t) = \underline{Q}_c(\underline{x}, t) \cdot \underline{n}\ .}$$

Du bilan global au bilan local

Un bilan global sur tous les sous-domaines fixes $\mathcal{D}$ où la densité $c(\underline{x}, t)$ et le vecteur flux $\underline{Q}_c(\underline{x}, t)$ sont continus, entraine le bilan local :

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left[\iiint_{\mathcal{D}} c(\underline{x}, t)\ d^3x\right] + \iint_{\partial\mathcal{D}} \underline{Q}_c(\underline{x}, t) \cdot \underline{n}\ dS = 0 \implies \frac{\partial c}{\partial t}(\underline{x}, t) + \mathrm{div}\ \underline{Q}_c(\underline{x}, t) = 0\ .}$$

Loi de Fick

La loi de Fick, dans le cas où le coefficient de diffusion moléculaire k_c est constant, entraine l'équation de diffusion :

$$\boxed{\underline{Q}_c(\underline{x}, t) = -k_c\ \underline{\mathrm{grad}}\ c(\underline{x}, t) \implies \frac{\partial c}{\partial t}(\underline{x}, t) = k_c\ \Delta c(\underline{x}, t)\ .}$$

Solutions analytiques de l'équation de diffusion

L'équation de diffusion $\frac{\partial c}{\partial t} = k_c \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 c}{\partial x_i^2}$ en dimension n pour le champ scalaire $c(x_1, x_2, ..., x_n, t)$ admet les solutions analytiques suivantes :

$$\boxed{c = \frac{1}{\left[\sqrt{2\,\pi}\ l(t)\right]^n}\ \exp\left[-\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{2\ l^2(t)}\right] \quad \text{avec} \quad l(t) = \sqrt{2\,k_c\,t}\ .}$$

Équation de bilan de l'énergie interne

$$\frac{d}{dt}\left[\iiint_{\mathcal{D}} e_{\text{int}}(\underline{x},t)\; d^3x\right] + \iint_{\partial\mathcal{D}} q(\underline{x},\underline{n},t)\; dS = \iiint_{\mathcal{D}} r(\underline{x},t)\; d^3x$$

$$\text{et}\quad \frac{\partial e_{\text{int}}}{\partial t} + \operatorname{div}\underline{Q} = r \quad \text{avec} \quad \underline{q}(\underline{x},\underline{n},t) = \underline{Q}(\underline{x},t)\cdot\underline{n}\;.$$

Loi de Fourier et loi d'état

La loi de Fourier est une loi de comportement et l'expression de l'énergie interne e_{int} est une loi d'état :

$$\underline{Q}(\underline{x},t) = -k\; \underline{\text{grad}}\; T(\underline{x},t) \quad \text{et} \quad e_{\text{int}} = \rho\, c\, T\;,$$

où $\underline{Q}$ est le flux de chaleur, k la conductivité thermique, T la température, ρ la masse volumique et c la chaleur spécifique.

Équation de la chaleur

En notant $\kappa = k/(\rho\, c)$ le coefficient de diffusion thermique, l'équation de la chaleur avec des conditions aux limites s'écrit :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa\, \Delta T + \frac{r}{\rho\, c} \qquad \text{avec} \qquad \kappa = \frac{k}{\rho\, c}\;,$$

$$\text{avec} \quad -\, k\; \underline{\text{grad}}\; T(\underline{x},t)\cdot\underline{n} = q_{Neumann}(\underline{x},t) \quad \text{pour } \underline{x}\in\partial\Omega_{Neumann}$$

$$\text{et} \qquad T(\underline{x},t) = T_{Dirichlet}(\underline{x},t) \quad \text{pour } \underline{x}\in\partial\Omega_{Dirichlet}\;.$$

3 Petites déformations

Transport d'un petit vecteur

La jacobienne $\underline{\underline{F}}(\underline{a})$ d'une déformation $\underline{X}$ permet de décrire le transport d'un petit vecteur $\underline{\delta a}$:

$$\underline{X}(\underline{a}+\underline{\delta a}) = \underline{X}(\underline{a}) + \underline{\underline{F}}(\underline{a})\cdot\underline{\delta a} + O(\delta a^2) \quad \text{avec} \quad F_{ij}(\underline{a}) = \frac{\partial X_i}{\partial a_j}(\underline{a})$$

$$\Longleftrightarrow\; \underline{\delta x} = \underline{\underline{F}}(\underline{a})\cdot\underline{\delta a} \quad \text{avec} \quad \underline{\delta x} = \underline{X}(\underline{a}+\underline{\delta a}) - \underline{X}(\underline{a})\;.$$

Tenseur des dilatations

Le produit scalaire de deux petits vecteurs $\underline{\delta x} = \underline{\underline{F}}(\underline{a}) \cdot \underline{\delta a}$ et $\underline{\delta x}' = \underline{\underline{F}}(\underline{a}) \cdot \underline{\delta a}'$ transportés par la jacobienne $\underline{\underline{F}}(\underline{a})$ en $\underline{a}$ s'écrit :

$$\underline{\delta x} \cdot \underline{\delta x}' = \underline{\delta a} \cdot \underline{\underline{C}}(\underline{a}) \cdot \underline{\delta a}' \quad \text{avec} \quad \underline{\underline{C}} = {}^t\underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{F}} \quad \Longleftrightarrow \quad C_{ij} = C_{ji} = F_{in}\, F_{jn} \ .$$

Représentations lagrangienne et eulérienne

Si $\underline{A}$ est la déformation inverse de la déformation $\underline{X}$, les représentations lagrangienne (L) et eulérienne (E) d'un champ B s'écrivent :

$$B^{(L)}(\underline{a}) = B^{(E)}[\underline{X}(\underline{a})] \qquad \Longleftrightarrow \qquad B^{(L)}[\underline{A}(\underline{x})] = B^{(E)}(\underline{x}) \ ,$$
$$B^{(L)}(\underline{a}) = B^{(E)}(\underline{x}) \qquad \text{ssi} \qquad \underline{x} = \underline{X}(\underline{a}) \iff \underline{a} = \underline{A}(\underline{x}) \ .$$

Longueurs, angles et volumes

Le tenseur des dilatations $\underline{\underline{C}}(\underline{a})$ permet de calculer la dilatation relative des longueurs, le glissement des angles et la variation relative des volumes pour des petits vecteurs $\underline{\delta x} = \underline{\underline{F}}(\underline{a}) \cdot \underline{\delta a}$ transportés par la déformation $\underline{X}$:

$$\Lambda(\underline{a}; \underline{\delta a}) = \frac{\|\underline{\delta x}\|}{\|\underline{\delta a}\|} = \sqrt{\frac{\underline{\delta a} \cdot \underline{\underline{C}}(\underline{a}) \cdot \underline{\delta a}}{\underline{\delta a} \cdot \underline{\delta a}}} = \sqrt{\frac{\delta a_i\, C_{ij}(\underline{a})\, \delta a_j}{\delta a_n\, \delta a_n}} \ ,$$
$$\sin \gamma(\underline{a}; \underline{\delta a}, \underline{\delta a}') = \frac{\underline{\delta x} \cdot \underline{\delta x}'}{\|\underline{\delta x}\|\ \|\underline{\delta x}'\|} = \frac{\underline{\delta a} \cdot \underline{\underline{C}}(\underline{a}) \cdot \underline{\delta a}'}{\sqrt{\underline{\delta a} \cdot \underline{\underline{C}}(\underline{a}) \cdot \underline{\delta a}}\ \sqrt{\underline{\delta a}' \cdot \underline{\underline{C}}(\underline{a}) \cdot \underline{\delta a}'}} \ ,$$
$$\delta \mathcal{V} = J(\underline{a})\ \delta \mathcal{V}_0 = \sqrt{\det \underline{\underline{C}}(\underline{a})}\ \ \delta \mathcal{V}_0 \ .$$

Tenseur des petites déformations

Le champ de déplacement $\underline{\xi}(\underline{a}) = \underline{X}(\underline{a}) - \underline{a}$ permet de définir le tenseur des petites déformations $\underline{\underline{\epsilon}}(\underline{a})$ par :

$$\epsilon_{ij}(\underline{a}) = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial \xi_i}{\partial a_j}(\underline{a}) + \frac{\partial \xi_j}{\partial a_i}(\underline{a})\right] \ ,$$

avec $\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{I}} + 2\ \underline{\underline{\epsilon}} + O(\eta^2)$ où η est un petit paramètre dans le cadre de l'hypothèse des petites déformations.

Allongements et autres petites variations

Le tenseur des petites déformations $\underline{\underline{\epsilon}}(\underline{a})$ permet de calculer l'allongement relatif des longueurs, le glissement des angles et la dilatation relative des volumes pour des petits vecteurs $\underline{\delta x} = [\underline{\underline{I}}(\underline{a}) + \underline{\underline{H}}(\underline{a})] \cdot \underline{\delta a}$ transportés par la petite déformation $\underline{X} = \underline{I} + \underline{\xi}$:

$$\Delta(\underline{a}; \underline{\delta a}) = \Lambda(\underline{a}; \underline{\delta a}) - 1 = \frac{\underline{\delta a} \cdot \underline{\underline{\epsilon}}(\underline{a}) \cdot \underline{\delta a}}{\underline{\delta a}^2} + O(\eta^2) ,$$

$$\gamma(\underline{a}; \underline{\delta a}, \underline{\delta a}') = 2\, \frac{\underline{\delta a} \cdot \underline{\underline{\epsilon}} \cdot \underline{\delta a}'}{\|\underline{\delta a}\|\, \|\underline{\delta a}'\|} + O(\eta^2) ,$$

$$\frac{\delta\mathcal{V} - \delta\mathcal{V}_0}{\delta\mathcal{V}_0} = \mathrm{tr}\ \underline{\underline{\epsilon}}(\underline{a}) + O(\eta^2) .$$

où η est un petit paramètre dans le cadre de l'hypothèse des petites déformations.

Hypothèse des champs peu déformés

Dans le cadre des petites déformations, où η est un petit paramètre, on peut confondre les représentations eulérienne et lagrangienne du champ B :

$$B^{(L)}(\underline{a}) = B^{(E)}(\underline{a})\, [1 + O(\eta)] .$$

4 Tenseur des contraintes

Intégrales triples

Si $c^{(E)}$ et $c^{(L)}$ sont respectivement les représentations eulériennes et lagrangienne d'un champ c pour la déformation $\underline{X}$ de Jacobien $J(\underline{a})$, le changement de variable $\underline{x} = \underline{X}(\underline{a})$ dans une intégrale triple sur un sous-domaine $\mathcal{D} = \underline{X}(\mathcal{D}_0)$ s'écrit :

$$\iiint_{\mathcal{D}} c^{(E)}(\underline{x})\, d^3x = \iiint_{\mathcal{D}_0} c^{(L)}(\underline{a})\, J(\underline{a})\, d^3a .$$

Conservation de la masse

Si $\rho^{(E)}$ et $\rho^{(L)}$ sont respectivement les représentations eulériennes et lagrangienne de champ de masse volumique ρ pour le mouvement $\underline{X}(\underline{a}, t)$, la loi de conservation de la masse dans le cas d'une configuration de référence homogène de masse volumique ρ_0 s'écrit :

$$\forall\ \underline{a} \in \Omega_0, \quad \forall\ t\ :\ \rho^{(L)}(\underline{a}, t)\ J(\underline{a}, t) = \rho_0 \quad \text{avec} \quad \rho^{(E)}[\underline{X}(\underline{a}, t), t] = \rho^{(L)}(\underline{a}, t) .$$

Mouvements de petites perturbations

Dans le cadre d'un mouvement $\underline{\xi}(\underline{a}, t) = \underline{X}(\underline{a}, t) - \underline{a}$ vérifiant l'hypothèse des petites perturbations caractérisée par le petit paramètre η, le Jacobien J, la masse volumique ρ, la quantité de mouvement $\underline{p}$ et la moment cinétique $\underline{\sigma}$ en $\underline{0}$ sur un sous-domaine $\mathcal{D}(t) = \underline{X}(\mathcal{D}_0, t)$ s'écrivent respectivement :

$$J(\underline{a}, t) = 1 + O(\eta) \ , \qquad \rho^{(L)}(\underline{a}, t) = \rho_0 \, [1 + O(\eta)] \ ,$$
$$\underline{p}[\mathcal{D}(t)] = \iiint_{\mathcal{D}_0} \rho_0 \frac{\partial \underline{\xi}}{\partial t}(\underline{a}, t) \; d^3a \, [1 + O(\eta)] \ ,$$
$$\underline{\sigma}[\mathcal{D}(t)] = \iiint_{\mathcal{D}_0} \rho_0 \, \underline{a} \wedge \frac{\partial \underline{\xi}}{\partial t}(\underline{a}, t) \; d^3a \, [1 + O(\eta)] \ .$$

Modélisation des efforts

La résultante $\underline{\mathcal{F}}_{\text{extvol}}[\mathcal{D}(t)]$ et le moment $\underline{\mathcal{M}}_{\text{extvol}}[\mathcal{D}(t)]$ des forces extérieures de volumes, la résultante $\underline{\mathcal{F}}_{\text{extcont}}[\mathcal{D}(t)]$ et le moment $\underline{\mathcal{M}}_{\text{extcont}}[\mathcal{D}(t)]$ des forces de contact extérieures, la résultante $\underline{\mathcal{F}}_{\text{intvol}}[\mathcal{D}(t)]$ et le moment $\underline{\mathcal{M}}_{\text{intvol}}[\mathcal{D}(t)]$ des forces intérieures de volume, la résultante $\underline{\mathcal{F}}_{\text{intcont}}[\mathcal{D}(t)]$ et le moment $\underline{\mathcal{M}}_{\text{intcont}}[\mathcal{D}(t)]$ des forces intérieures de contact, sur un sous-domaine $\mathcal{D}(t)$ issu d'un mouvement de petite perturbation du sous-domaine $\mathcal{D}_0$ de la configuration initiale s'écrivent, à l'ordre dominant du petit paramètre η de la perturbation :

$$\underline{\mathcal{F}}_{\text{extvol}} = \iiint_{\mathcal{D}_0} \underline{f}(\underline{a}, t) \; d^3a \quad \text{et} \quad \underline{\mathcal{M}}_{\text{extvol}} = \iiint_{\mathcal{D}_0} \underline{a} \wedge \underline{f}(\underline{a}, t) \; d^3a \ ,$$
$$\underline{\mathcal{F}}_{\text{extcont}} = \iint_{\partial\mathcal{D}_0} \underline{T}(\underline{a}, \underline{n}, t) \, dS_0 \quad \text{et} \quad \underline{\mathcal{M}}_{\text{extcont}} = \iint_{\partial\mathcal{D}_0} \underline{a} \wedge \underline{T}(\underline{a}, \underline{n}, t) \, dS_0 \ ,$$
$$\underline{\mathcal{F}}_{\text{intvol}}[\mathcal{D}(t)] = \underline{0} \qquad \text{et} \qquad \underline{\mathcal{M}}_{\text{intvol}}[\mathcal{D}(t)] = \underline{0} \ ,$$
$$\underline{\mathcal{F}}_{\text{intcont}}[\mathcal{D}(t)] = \underline{0} \qquad \text{et} \qquad \underline{\mathcal{M}}_{\text{intcont}}[\mathcal{D}(t)] = \underline{0} \ .$$

Principe fondamental de la dynamique

L'équation de conservation $\frac{d}{dt}\underline{p}[\mathcal{D}(t)] = \underline{\mathcal{F}}_{\text{extvol}}[\mathcal{D}(t)] + \underline{\mathcal{F}}_{\text{extcont}}[\mathcal{D}(t)]$ de la quantité de mouvement, pour tout sous-domaine $\mathcal{D}(t)$ issu d'un mouvement de petite perturbation du sous-domaine $\mathcal{D}_0$ de la configuration initiale entraine la linéarité $\underline{T}(\underline{a}, \underline{n}, t) = \underline{\underline{\sigma}}(\underline{a}, t) \cdot \underline{n}$, où $\underline{\underline{\sigma}}$ est le tenseur des contraintes. L'équation $\frac{d}{dt}\underline{\sigma}[\mathcal{D}(t)] = \underline{\mathcal{M}}_{\text{extvol}}[\mathcal{D}(t)] + \underline{\mathcal{M}}_{\text{extcont}}[\mathcal{D}(t)]$ de conservation du moment cinétique entraine la symétrie de ce tenseur $\underline{\underline{\sigma}}$. Le principe fondamental se réduit alors à l'équation :

$$\iiint_{\mathcal{D}_0} \rho_0 \, \frac{\partial^2 \underline{\xi}}{\partial t^2}(\underline{a}, t) \; d^3a = \iiint_{\mathcal{D}_0} \underline{f}(\underline{a}, t) \; d^3a + \iint_{\partial\mathcal{D}_0} \underline{\underline{\sigma}}(\underline{a}, t) \cdot \underline{n} \; dS_0 \ ,$$
$$\Longrightarrow \qquad \rho_0 \, \frac{\partial^2 \underline{\xi}}{\partial t^2}(\underline{a}, t) = \underline{f}(\underline{a}, t) + \underline{\text{div}} \, \underline{\underline{\sigma}}(\underline{a}, t) \ .$$

Tricercle de Mohr

Étant donnée un tenseur symétrique $\underline{\underline{\sigma}}$, on note $\sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \sigma_3$ ses valeurs propres réelles. Les couples (σ, τ), où $\sigma = \underline{n} \cdot \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}$ et $\tau = \|\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} - \sigma \, \underline{n}\|$, décrivent, lorsque le vecteur unitaire $\underline{n}$ prend toutes les valeurs possibles, le domaine compris à l'extérieur des demi-cercles C_1 et C_3 et à l'intérieur du demi-cercle C_2 définis par :

$$\boxed{\begin{aligned}
C_1 &= \left\{ (\sigma,\tau) \in I\!R \times I\!R^+ \quad \middle| \quad \left[\sigma - \frac{\sigma_2+\sigma_3}{2}\right]^2 + \tau^2 = \left(\frac{\sigma_3-\sigma_2}{2}\right)^2 \right\} \ ,\\
C_2 &= \left\{ (\sigma,\tau) \in I\!R \times I\!R^+ \quad \middle| \quad \left[\sigma - \frac{\sigma_1+\sigma_3}{2}\right]^2 + \tau^2 = \left(\frac{\sigma_3-\sigma_1}{2}\right)^2 \right\} \ ,\\
C_3 &= \left\{ (\sigma,\tau) \in I\!R \times I\!R^+ \quad \middle| \quad \left[\sigma - \frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\right]^2 + \tau^2 = \left(\frac{\sigma_2-\sigma_1}{2}\right)^2 \right\} \ .
\end{aligned}}$$

5 Équations de Lamé

Loi de Hooke

Le comportement élastique, homogène et isotrophe d'un solide en petites perturbations autour de sa configuration intiale fait intervenir les deux coefficients de Lamé λ et μ à travers la loi de Hooke :

$$\boxed{\underline{\underline{\sigma}}(\underline{a},t) = \lambda\,[\mathrm{tr}\ \underline{\underline{\epsilon}}(\underline{a},t)]\ \underline{\underline{I}} + 2\,\mu\,\underline{\underline{\epsilon}}(\underline{a},t)\ .}$$

Équations de Lamé

Les équations de Lamé expriment le principe fondamental de la dynamique $\rho_0\,\frac{\partial^2\underline{\xi}}{\partial t^2}(\underline{a},t) = \underline{f}(\underline{a},t) + \underline{\mathrm{div}}\ \underline{\underline{\sigma}}(\underline{a},t)$ en prenant en compte la loi de Hooke et s'écrivent :

$$\boxed{\rho_0\,\frac{\partial^2\underline{\xi}}{\partial t^2}(\underline{a},t) = \underline{f}(\underline{a},t) + (\lambda+\mu)\ \underline{\mathrm{grad}}\ [\mathrm{div}\ \underline{\xi}(\underline{a},t)] + \mu\ \Delta\underline{\xi}(\underline{a},t)\ ,}$$

avec des conditions aux limites de Dirichlet $\underline{\xi}(\underline{a},t) = \underline{\xi}_{Dirichlet}(\underline{a},t)$ ou de Neumann $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{a},t)\cdot\underline{n} = \underline{T}_{Neumann}(\underline{a},t)$.

Inversion de la loi de Hooke

L'inversion de la loi de Hooke fait intervenir le module de Young E et le coefficient de Poisson ν et s'écrit :

$$\boxed{\begin{gathered}
\underline{\underline{\epsilon}} = -\frac{\nu}{E}\,(\mathrm{tr}\ \underline{\underline{\sigma}})\ \underline{\underline{I}} + \frac{1+\nu}{E}\ \underline{\underline{\sigma}}\ ,\\
\text{avec}\quad E = \frac{(3\,\lambda+2\,\mu)\,\mu}{(\lambda+\mu)} \qquad \text{et} \qquad \nu = \frac{\lambda}{2\,(\lambda+\mu)}\ ,\\
\text{ou}\quad \lambda = \frac{\nu\,E}{(1+\nu)(1-2\,\nu)} \qquad \text{et} \qquad \mu = \frac{E}{2\,(1+\nu)}\ .
\end{gathered}}$$

Expérience de traction uniaxiale

Une traction $\underline{T} = -F\,\underline{e}_1$ sur deux faces opposées de normale $\underline{e}_1$ conduit aux alongements relatifs Δ_i qui vérifient :

$$\boxed{F = E\,\Delta_1 \qquad \text{et} \qquad \Delta_2 = \Delta_3 = -\nu\,\Delta_1\ .}$$

Expérience de compression uniforme

Une compression uniforme de pression p entraine une dilatation relative de volume qui vérifie :

$$\boxed{-p = \kappa_e\,\frac{\mathcal{V} - \mathcal{V}_0}{\mathcal{V}_0} \qquad \text{avec} \qquad \kappa_e = \frac{E}{3(1-2\,\nu)} = \frac{3\,\lambda + 2\,\mu}{3}\ ,}$$

ce qui implique, en invoquant le second principe, $\nu \leq 1/2$.

Projection des équations de Lamé

Les équations de Lamé sont équivalentes au système d'équation :

$$\boxed{\begin{array}{c}
\dfrac{\partial^2 d}{\partial t^2} = c_1^2\,\Delta d \qquad \text{avec} \qquad d = \operatorname{div}\,\underline{\xi} \qquad \text{et} \qquad c_1 = \sqrt{\dfrac{\lambda + 2\,\mu}{\rho_0}}\ , \\[2ex]
\dfrac{\partial^2 \underline{r}}{\partial t^2} = c_2^2\,\Delta \underline{r} \qquad \text{avec} \qquad \underline{r} = \underline{\operatorname{rot}}\,\underline{\xi} \qquad \text{et} \qquad c_2 = \sqrt{\dfrac{\mu}{\rho_0}}\ .
\end{array}}$$

6 Cinématique du continu

Détermination des trajectoires

Les trajectoires des particules dont les vitesses sont décrites par le champ de vitesse de représentation eulérienne $\underline{U}(\underline{x},t)$, sont des courbes $\underline{x}(t)$ paramétrées par le temps t et déterminées par :

$$\boxed{\begin{array}{c}
\dfrac{d\underline{x}(t)}{dt} = \underline{U}\,[\underline{x}(t), t] \quad \text{avec } \underline{x}(0) = \underline{a} \text{ où } \underline{a} \text{ est quelconque .} \\[2ex]
\Longleftrightarrow \qquad \underline{x}(t) = \underline{X}(\underline{a}, t) \quad \text{avec} \quad \dfrac{\partial \underline{X}}{\partial t}(\underline{a}, t) = \underline{U}\,[\underline{X}(\underline{a}, t), t] = \underline{U}^{(L)}(\underline{a}, t)\ .
\end{array}}$$

Lignes de courant

Les lignes de courant du champ de vitesse $\underline{U}(\underline{x}, t)$ à l'instant t sont toutes les courbes paramétrées $\underline{y}(s)$ définies par :

$$\frac{d\underline{y}}{ds}(s) \wedge \underline{U}[\underline{y}(s), t] = \underline{0} \quad \text{ou} \quad \frac{d\underline{y}}{ds}(s) = \phi(s)\, \underline{U}[\underline{y}(s), t] \quad \text{ou} \quad \frac{dy_1}{U_1} = \frac{dy_2}{U_2} = \frac{dy_3}{U_3} \ ,$$

où $\phi(s)$ est une fonction strictement positive quelconque. Lignes de courants et trajectoires décrivent les mêmes courbes lorsque $\underline{U}$ ne dépend pas du temps (champ de vitesse stationnaire).

Gradient du champ de vitesse

Le gradient du champ de vitesse $\underline{U}(\underline{x}, t)$ est une tenseur d'ordre deux dont la décomposition en parties symétrique et antisymétrique s'écrit :

$$\underline{\underline{K}}(\underline{x}, t) = \underline{\underline{\text{grad}}}\ \underline{U}(\underline{x}, t) = \underline{\underline{\Omega}} + \underline{\underline{D}} \quad \text{avec} \quad K_{ij}(\underline{x}, t) = \frac{\partial U_i}{\partial x_j}(\underline{x}, t) \ ,$$

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right] \quad \text{et} \quad D_{ij} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right] \ .$$

où $\underline{\underline{\Omega}}$ est la partie antisymétrique de $\underline{\underline{K}}$, appelée tenseur des taux de rotation et $\underline{\underline{D}}$ sa partie symétrique, appelée tenseur des taux de déformation.

Dérivée particulaire

Les représentations eulérienne et lagrangienne, pour le champ de vitesse $\underline{U}(\underline{x}, t)$, du champ de dérivée particulaire dB/dt du champ scalaire B, de représentation eulérienne $B(\underline{x}, t)$ et lagrangienne $B^{(L)}(\underline{a}, t)$, s'écrivent respectivement :

$$\frac{dB}{dt}(\underline{x}, t) = \frac{\partial B}{\partial t}(\underline{x}, t) + \underline{U}(\underline{x}, t) \cdot \underline{\text{grad}}\ B(\underline{x}, t) \quad \text{et} \quad \frac{dB}{dt}^{(L)}(\underline{a}, t) = \frac{\partial B}{\partial t}^{(L)}(\underline{a}, t) \ .$$

Champ d'accélération

Le champ d'accélération $\underline{\Gamma}(\underline{x}, t)$ associé au champ de vitesse $\underline{U}(\underline{x}, t)$ vérifie :

$$\underline{\Gamma} = \frac{d\underline{U}}{dt} = \frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + \underline{U} \cdot \underline{\underline{\text{grad}}}\ \underline{U} = \frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + \underline{\text{rot}}\ \underline{U} \wedge \underline{U} + \frac{1}{2}\underline{\text{grad}}\ \underline{U}^2 \ .$$

Transport d'un petit vecteur

Un petit vecteur $\underline{\delta x}(t)$ transporté par le champ de vitesse $\underline{U}(\underline{x},t)$ de gradient $\underline{\underline{K}}(\underline{x},t)$ vérifie :

$$\boxed{\frac{d}{dt}\underline{\delta x}(t) = \underline{\underline{K}}[\underline{x}(t),t] \cdot \underline{\delta x}(t) = \underline{\omega}[\underline{x}(t),t] \wedge \underline{\delta x}(t) + \underline{\underline{D}}[\underline{x}(t),t] \cdot \underline{\delta x}(t)\ ,}$$

où $\underline{\underline{D}}$ est le tenseur des taux de déformation et $\underline{\omega}$ est le vecteur rotation associé au tenseur des taux de rotation $\underline{\underline{\Omega}}$.

Variation des longueurs

Le taux de variation relatif des longueurs des petits vecteurs $\underline{\delta x}(t)$ transportés par le champ de vitesse $\underline{U}(\underline{x},t)$ de tenseur des taux de déformation $\underline{\underline{D}}(\underline{x},t)$ vérifie :

$$\boxed{\frac{1}{\|\underline{\delta x}(t)\|}\frac{d\|\underline{\delta x}(t)\|}{dt} = \frac{\underline{\delta x}(t) \cdot \underline{\underline{D}}[\underline{x}(t),t] \cdot \underline{\delta x}(t)}{\|\underline{\delta x}(t)\|^2}\ .}$$

Par exemple, la composante diagonale D_{11} de $\underline{\underline{D}}$ est le taux de variation de la longueur d'un petit vecteur colinéaire à $\underline{e}_1$ à l'instant t.

Variation des angles

Le taux de variation de l'angle de glissement de deux petits vecteurs $\underline{\delta x}(t)$ et $\underline{\delta x}'(t)$, orthogonaux à l'instant t et transportés par le champ de vitesse $\underline{U}(\underline{x},t)$ de tenseur des taux de déformation $\underline{\underline{D}}(\underline{x},t)$, vérifie :

$$\boxed{\frac{d\gamma(t)}{dt} = 2\,\frac{\underline{\delta x}(t) \cdot \underline{\underline{D}}[\underline{x}(t),t] \cdot \underline{\delta x}'(t)}{\|\underline{\delta x}(t)\|\,\|\underline{\delta x}'(t)\|} \qquad \text{si } \gamma(t) = 0\ .}$$

Par exemple, la composante diagonale D_{12} de $\underline{\underline{D}}$ est le taux de variation de l'angle de glissement des deux petits vecteurs respectivement colinéaires à $\underline{e}_1$ et $\underline{e}_2$ à l'instant t.

Variation des volumes

Le taux de variation relative d'un petit volume $\delta\mathcal{V}(t)$ transporté par le mouvement $\underline{U}$ vérifie :

$$\boxed{\frac{1}{\delta\mathcal{V}(t)}\,\frac{d}{dt}\delta\mathcal{V}(t) = \operatorname{div}\,\underline{U}[\underline{x}(t),t]\ .}$$

7 Équations de bilan

Domaine transporté par le mouvement

Si $\mathcal{D}(t)$ est un domaine transporté par le mouvement de champ de vitesse $\underline{U}(\underline{x},t)$ et $c(\underline{x},t)$ un champ continu, on peut écrire :

$$\frac{d}{dt}\iiint_{\mathcal{D}(t)} c\, d^3x = \iiint_{\mathcal{D}(t)} \left(\frac{dc}{dt} + c \;\mathrm{div}\; \underline{U}\right) d^3x = \iiint_{\mathcal{D}(t)} \left[\frac{\partial c}{\partial t} + \mathrm{div}\;(c\,\underline{U})\right] d^3x \;.$$

Conservation de la masse

Si $\rho(\underline{x},t)$ est le champ de masse volumique et $\underline{U}(\underline{x},t)$ le champ de vitesse, les trois formulations de la loi de conservation de la masse s'écrivent :

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \;\mathrm{div}\; \underline{U} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \underline{U}\cdot \underline{\mathrm{grad}}\;\rho + \rho\;\mathrm{div}\;\underline{U} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\;(\rho\,\underline{U}) = 0 \;.$$

Théorème de Reynolds

Dans la cas où la loi de conservation de la masse est vérifiée et si $\mathcal{D}(t)$ est un domaine transporté par le mouvement de champ de vitesse $\underline{U}(\underline{x},t)$, $\rho(\underline{x},t)$ est le champ de masse volumique et $\phi(\underline{x},t)$ est un champ continu, on peut écrire :

$$\frac{d}{dt}\iiint_{\mathcal{D}(t)} \rho\,\phi\; d^3x = \iiint_{\mathcal{D}(t)} \rho\,\frac{d\phi}{dt}\; d^3x \;.$$

Linéarité du flux d'une équation de bilan

La formulation d'une équation de bilan faisant intervenir les champs $c(\underline{x},t)$, $f_c(\underline{x},t)$ et $q_c(\underline{x},\underline{n},t)$ entraine la linéarité du flux par rapport à la normale sortante $\underline{n}$:

$$\frac{d}{dt}\iiint_{\mathcal{D}(t)} c(\underline{x},t)\, d^3x + \iint_{\partial\mathcal{D}(t)} q_c(\underline{x},\underline{n},t)\, dS = \iiint_{\mathcal{D}(t)} f_c(\underline{x},t)\, d^3x$$
$$\text{pour tout } \mathcal{D}(t) \quad\Longrightarrow\quad q_c(\underline{x},\underline{n},t) = \underline{Q}_c(\underline{x},t)\cdot\underline{n}\;,$$

où $\underline{Q}_c(\underline{x},t)$ est le vecteur flux.

Trois formulations d'une équation de bilan

Une équation de bilan avec $c(\underline{x},t) = \rho(\underline{x},t)\,\phi(\underline{x},t)$ peut être écrite sous les trois formes suivantes, la dernière supposant la conservation de la masse :

$$\text{intégrale :} \qquad \frac{d}{dt}\iiint_{\mathcal{D}(t)} \rho\,\phi\, d^3x + \iint_{\partial\mathcal{D}(t)} \underline{Q}_c\cdot\underline{n}\,dS = \iiint_{\mathcal{D}(t)} f_c\, d^3x\ ,$$

$$\text{conservative :} \qquad \frac{\partial}{\partial t}(\rho\,\phi) + \operatorname{div}\,(\rho\,\phi\,\underline{U} + \underline{Q}_c) = f_c\ ,$$

$$\text{avec masse conservée :} \qquad \rho\,\frac{d\phi}{dt} + \operatorname{div}\,\underline{Q}_c = f_c\ .$$

Relation de saut

La formulation intégrale d'une équation de bilan implique un bilan local sur le domaine où $c(\underline{x},t)$ et $\underline{Q}_c(\underline{x},t)$ et des relations de saut à travers les surfaces de discontinuité $\Sigma(t)$:

$$\frac{d}{dt}\iiint_{\mathcal{D}(t)} c(\underline{x},t)\, d^3x + \iint_{\partial\mathcal{D}(t)} \mathcal{Q}_c(\underline{x},t)\cdot\underline{n}\,dS = \iiint_{\mathcal{D}(t)} f_c(\underline{x},t)\, d^3x\ ,$$

$$\Longrightarrow \qquad \frac{\partial c}{\partial t} + \operatorname{div}\,(c\,\underline{U} + \underline{Q}_c) = f_c \quad \text{pour } \underline{x}\notin\Sigma(t)$$

$$\text{et} \quad [\![c\,(\underline{U}-\underline{W})\cdot\underline{N}]\!] + [\![\underline{Q}_c\cdot\underline{N}]\!] = 0 \quad \text{pour } \underline{x}\in\Sigma(t)\ .$$

Modélisation des efforts

La résultante $\underline{\mathcal{F}}_{\text{extvol}}$, le moment $\underline{\mathcal{M}}_{\text{extvol}}$ et la puissance $\mathcal{P}_{\text{extvol}}$ des forces extérieures de volumes, la résultante $\underline{\mathcal{F}}_{\text{extcont}}$, le moment $\underline{\mathcal{M}}_{\text{extcont}}$ et la puissance $\mathcal{P}_{\text{extcont}}$ des forces de contact extérieures, la résultante $\underline{\mathcal{F}}_{\text{intvol}}$, le moment $\underline{\mathcal{M}}_{\text{intvol}}$ et la puissance $\mathcal{P}_{\text{intvol}}$ des forces intérieures de volume, la résultante $\underline{\mathcal{F}}_{\text{intcont}}$, le moment $\underline{\mathcal{M}}_{\text{intcont}}$ et la puissance $\mathcal{P}_{\text{intcont}}$ des forces intérieures de contact, sur un sous-domaine $\mathcal{D}(t)$ tranporté par le mouvement $\underline{U}(\underline{x},t)$ s'écrivent :

$$\underline{\mathcal{F}}_{\text{extvol}} = \iiint_{\mathcal{D}(t)} \underline{f}\, d^3x\ ,\ \underline{\mathcal{M}}_{\text{extvol}} = \iiint_{\mathcal{D}(t)} \underline{x}\wedge\underline{f}\, d^3x\ ,\ \mathcal{P}_{\text{extvol}} = \iiint_{\mathcal{D}(t)} \underline{f}\cdot\underline{U}\, d^3x\ ,$$

$$\underline{\mathcal{F}}_{\text{extcont}} = \iint_{\partial\mathcal{D}(t)} \underline{T}\,dS\ ,\underline{\mathcal{M}}_{\text{extcont}} = \iint_{\partial\mathcal{D}(t)} \underline{x}\wedge\underline{T}\,dS\ ,\mathcal{P}_{\text{extcont}} = \iint_{\partial\mathcal{D}(t)} \underline{T}\cdot\underline{U}\,dS,$$

$$\underline{\mathcal{F}}_{\text{intvol}}[\mathcal{D}(t)] = \underline{0}\ , \qquad \underline{\mathcal{M}}_{\text{intvol}}[\mathcal{D}(t)] = \underline{0}\ , \qquad \mathcal{P}_{\text{intvol}}[\mathcal{D}(t)] = 0\ ,$$

$$\underline{\mathcal{F}}_{\text{intcont}}[\mathcal{D}(t)] = \underline{0}\ , \qquad \underline{\mathcal{M}}_{\text{intcont}}[\mathcal{D}(t)] = \underline{0}\ , \qquad \mathcal{P}_{\text{intcont}}[\mathcal{D}(t)] \neq 0\ .$$

où $\underline{f}(\underline{x},t)$ est la densité volumique des forces de volume et $\underline{T}(\underline{x},\underline{n},t$ la densité surfacique des forces de contact.

Principe fondamental de la dynamique

L'équation de conservation $\frac{d}{dt}\underline{p}[\mathcal{D}(t)] = \underline{\mathcal{F}}_{\text{extvol}}[\mathcal{D}(t)] + \underline{\mathcal{F}}_{\text{extcont}}[\mathcal{D}(t)]$ de la quantité de mouvement, pour tout sous-domaine $\mathcal{D}(t)$ transporté par le mouvement de vitesse $\underline{U}(\underline{x},t)$, entraine la linéarité $\underline{T}(\underline{x},\underline{n},t) = \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x},t)\cdot\underline{n}$ où $\underline{\underline{\sigma}}$ est le tenseur des contraintes. L'équation $\frac{d}{dt}\underline{\sigma}[\mathcal{D}(t)] = \underline{\mathcal{M}}_{\text{extvol}}[\mathcal{D}(t)] + \underline{\mathcal{M}}_{\text{extcont}}[\mathcal{D}(t)]$ de conservation du moment cinétique entraine la symétrie de ce tenseur $\underline{\underline{\sigma}}$. Le principe fondamental se réduit alors à la formulation intégrale dont découle un bilan local et des relations de saut sur les surfaces de discontuité $\Sigma(t)$:

$$\frac{d}{dt}\iiint_{\mathcal{D}(t)} \rho\,\underline{U}\;\;d^3x - \iint_{\partial\mathcal{D}(t)} \underline{\underline{\sigma}}\cdot\underline{n}\,dS = \iiint_{\mathcal{D}(t)} \underline{f}\,d^3x$$

$$\Longrightarrow \quad \rho\,\frac{d\underline{U}}{dt} = \underline{f} + \underline{\text{div}}\,\underline{\underline{\sigma}} \qquad \text{pour } \underline{x}\notin\Sigma(t)$$

$$\text{et}\quad [\![\rho\,\underline{U}\,(\underline{U}-\underline{W})\cdot\underline{N}]\!] - [\![\underline{\underline{\sigma}}\cdot\underline{N}]\!] = \underline{0} \qquad \text{pour } \underline{x}\in\Sigma(t)\ .$$

8 Équations de Navier-Stokes

Rhéologie des fluides newtoniens

Un fluide newtonien est défini par une loi rhéologique qui relie le tenseur des contraintes à un champ de pression p et au champ de tenseur des taux de déformations $\underline{\underline{D}}$:

$$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x},t) = -p(\underline{x},t)\,\underline{\underline{I}} + \underline{\underline{\tau}}(\underline{x},t) \qquad \text{avec} \qquad \underline{\underline{\tau}} = \lambda_n\,(\text{tr}\,\underline{\underline{D}})\,\underline{\underline{I}} + 2\,\mu_n\,\underline{\underline{D}}\ ,$$

où $\underline{\underline{\tau}}$ est le tenseur des contraintes visqueuses et (λ_n, μ_n) des coefficients de Lamé.

Conditions aux limites pour la mécanique des fluides

L'équation de quantité de mouvement d'un fluide newtonien ($\lambda_n \neq 0$, $\mu_n \neq 0$) ou d'un fluide parfait ($\lambda_n = 0$, $\mu_n = 0$), complétée par des conditions aux limites sur une paroi fixe ou une surface libre, s'écrivent respectivement :

$$\rho\,\frac{d\underline{U}}{dt} = \underline{f} - \underline{\text{grad}}\,p + (\lambda_n+\mu_n)\,\underline{\text{grad}}\,(\text{div}\,\underline{U}) + \mu_n\,\Delta\underline{U}\ ,$$

	Fluide visqueux	Fluide parfait
Paroi solide	$\underline{U} = \underline{0}$	$\underline{U}\cdot\underline{n} = 0$
Surface libre	$\partial F/\partial t + \underline{U}\cdot\underline{\text{grad}}\;F = 0$	
$F(\underline{x},t) = 0$	$-p\,\underline{N} + \underline{\underline{\tau}}\cdot\underline{N} = -\underline{\underline{\sigma}}_a\,\underline{N}$	$-p = \underline{N}\cdot\underline{\underline{\sigma}}_a\cdot\underline{N}$

où $\underline{\underline{\sigma}}_a$ est le tenseur des contraintes du milieu en contact avec le fluide à travers une surface libre, par exemple $\underline{\underline{\sigma}}_a = -p_a\,\underline{N}$ si le milieu est un fluide parfait.

Équations de Navier-Stokes incompressibles

Les équations de Navier-Stokes incompressibles s'écrivent :

$$\boxed{\text{div}\, \underline{U} = 0 \;, \qquad \frac{d\underline{U}}{dt} = \frac{1}{\rho_0}\, \underline{f} - \frac{1}{\rho_0}\, \underline{\text{grad}}\, p + \nu_n\, \Delta \underline{U} \;,}$$

où $\nu_n = \mu_n/\rho_0$ est la viscosité cinématique et μ_n la viscosité dynamique. Dans le cas incompressible, le champ de pression n'est pas une variable thermodynamique car il ne dépend que du champ de vitesse. Ces équations sont appelées "équations d'Euler incompressibles" dans le cas inviscide ($\nu_n = 0$).

"Théorème" de l'énergie cinétique

Le postulat $\frac{d}{dt}\mathcal{K} = \mathcal{P}_{\text{extvol}} + \mathcal{P}_{\text{extcont}}$ pour l'énergie cinétique $\mathcal{K}[\mathcal{D}(t)] = \iiint_{\mathcal{D}(t)} \frac{1}{2}\, \rho\, \underline{U}^2\; d^3x$ entraine l'expression suivante de la puissance des efforts intérieurs :

$$\boxed{\mathcal{P}_{\text{int}}[\mathcal{D}(t)] = \iiint_{\mathcal{D}(t)} \pi_{\text{int}}\, d^3x \quad \text{avec} \quad \pi_{\text{int}} = -\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{D}} \;.}$$

Premier principe de la thermodynamique

Le premier principe de la thermodynamique $\frac{d}{dt}\left\{\mathcal{E}_{\text{int}} + \mathcal{K}\right\} = \mathcal{P}_{\text{the}} + \mathcal{P}_{\text{extvol}} + \mathcal{P}_{\text{extcont}}$ où $\mathcal{E}_{\text{int}} = \iiint_{\mathcal{D}(t)} \rho(\underline{x},t)\; e(\underline{x},t)\; d^3x$ est l'énergie interne et $\mathcal{P}_{\text{the}} = \iiint_{\mathcal{D}(t)} r(\underline{x},t)\, d^3x - \iint_{\partial\mathcal{D}(t)} \underline{Q}(\underline{x},t) \cdot \underline{n}\, dS$ est la puissance thermique, conduit au bilan local :

$$\boxed{\rho\, \frac{de}{dt} = r - \text{div}\, \underline{Q} + \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{D}} \;.}$$

Équation de bilans ou lois de conservation

Le tableau suivant récapitule les équations de bilan (B) en distinguant celles qui sont des lois de conservation (C) :

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{D}(t)} \rho\, \phi\, d^3x + \iint_{\partial\mathcal{D}(t)} \underline{Q}_c \cdot \underline{n}\, dS = \iiint_{\mathcal{D}(t)} f_c\, d^3x$$

	$\mathcal{C}[\mathcal{D}(t)]$	$\rho\, \phi$	$\underline{Q}_c$	f_c
	Grandeur	**Densité**	**Flux**	**Production**
C	$m[\mathcal{D}(t)]$	ρ	$\underline{0}$	0
C	$\underline{p}[\mathcal{D}(t)]$	$\rho\, \underline{U}$	$-\underline{\underline{\sigma}}$	$\underline{f}$
B	$\mathcal{E}_{\text{int}}[\mathcal{D}(t)]$	$\rho\, e$	$\underline{Q}$	$r + \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{D}}$
B	$\mathcal{K}[\mathcal{D}(t)]$	$\frac{1}{2}\, \rho\, \underline{U}^2$	$-\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{U}$	$\underline{f} \cdot \underline{U} - \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{D}}$
C	$\mathcal{E}_{\text{tot}}[\mathcal{D}(t)] = (\mathcal{E}_{\text{int}} + \mathcal{K})[\mathcal{D}(t)]$	$\rho\, e + \frac{1}{2}\, \rho\, \underline{U}^2$	$\underline{Q} - \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{U}$	$r + \underline{f} \cdot \underline{U}$

Équations de Navier-Stokes compressibles

Les équations de Navier-Stokes compressibles sont constituées de la loi de conservation de la masse, de deux lois d'état, de la loi de conservation de la quantité de mouvement et de l'équation de bilan de l'énergie interne :

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{d\rho}{dt} = -\rho \operatorname{div} \underline{U} , \qquad p = \mathcal{P}_T(\rho, T) , \qquad e = \mathcal{E}_T(\rho, T) , \\ &\rho \frac{d\underline{U}}{dt} = -\underline{\mathrm{grad}}\, p + \underline{f} + (\lambda_\mathrm{n} + \mu_\mathrm{n}) \underline{\mathrm{grad}} \operatorname{div} \underline{U} + \mu_\mathrm{n} \Delta \underline{U} , \\ &\rho \frac{de}{dt} = r + k \Delta T - p \operatorname{div} \underline{U} + \lambda_\mathrm{n} (\operatorname{div} \underline{U})^2 + 2\, \mu_\mathrm{n}\, \underline{\underline{D}} : \underline{\underline{D}} . \end{aligned}}$$

Ces équations sont appelées “équations d'Euler compressibles” dans le cas inviscide (fluide parfait).

Équations d'Euler compressibles et adiabatiques

Dans le cas d'un écoulement adiabatique ($r = 0$, $\underline{Q} = \underline{0}$) d'un fluide parfait ($\lambda_n = \mu_n = 0$), l'équation de bilan de l'énergie interne e peut être remplacée par l'équation de conservation de l'entropie s, définie par l'équation de Gibbs $ds = (1/T)\, de - [p/(\rho^2 T)]\, d\rho$. Les équations d'Euler compressibles et adiabatiques s'écrivent alors :

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{d\rho}{dt} = -\rho \operatorname{div} \underline{U} , \qquad p = \mathcal{P}_s(\rho, s) , \\ &\rho \frac{d\underline{U}}{dt} = -\underline{\mathrm{grad}}\, p + \underline{f} , \qquad \rho \frac{ds}{dt} = 0 . \end{aligned}}$$

Ondes sonores

Les petites oscillations autour d'un équilibre $\underline{U} = \underline{0}$ de constante ρ_0, s_0 et $p_0 = \mathcal{P}_s(\rho_0, s_0)$ conduisent, dans le cas d'un écoulement adiabatique de fluide parfait (équations d'Euler compressibles et adiabatiques) à l'équation des ondes sonores suivante :

$$\boxed{\frac{\partial^2 \widetilde{\rho}}{\partial t^2} - c_0^2\, \Delta \widetilde{\rho} = 0 \quad \text{avec} \quad c_0^2(\rho_0, s_0) = \left(\frac{\partial \mathcal{P}_s}{\partial \rho}\right)_s .}$$

Filtrage des ondes sonores

Lorsque la vitesse du son c_0 est grande devant la vitesse caractéristique U_0 de l'écoulement, le nombre de Mach M devient petit devant un et l'écoulement est considéré comme étant incompressible :

$$\boxed{\text{Compressible} \to \text{Incompressible} \quad \Longleftrightarrow \quad M = \frac{U_0}{c_0} \to 0 .}$$

La pente c_0^2 de la loi d'état $\mathcal{P}_s(\rho, s)$ devenant infinie pour $M \to 0$, la pression perd son statut de variable thermodynamique pour ne dépendre que du champ de vitesse.