Exercices pour le chapitre 9 : Problèmes corrigés

Version 9 septembre 2018

1 Exercices de niveau II

NIVEAU IIa Vases communicants

On considère deux réservoirs $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ dont les niveaux d'eau respectifs sont notés h_1 et h_2 (voir figure **9**.1). Ils sont reliés par un petit tube de section circulaire rempli d'eau allant de A_1 à A_2 respectivement situés à l'intérieur de $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$. Dans un repère $Oxyz$ où z est la coordonnée verticale et $z = 0$ est la cote du fond des réservoirs, on suppose $\underline{OA_1} = -\frac{L+d}{2}\,\underline{e}_x + h_0\,\underline{e}_z$ et $\underline{OA_2} = \frac{L+d}{2}\,\underline{e}_x + h_0\,\underline{e}_z$.

On note d le diamètre du tube constitué de deux cylindres verticaux de longueur l et d'axes respectifs A_1B_1 et A_2B_2, reliés par un tube horizontal de longueur L d'axe C_1C_2. On suppose que d est suffisamment petit pour que l'écoulement dans le tube puisse être considéré comme laminaire. On néglige alors l'effet des deux coudes reliant les cylindres verticaux au cylindre horizontal.

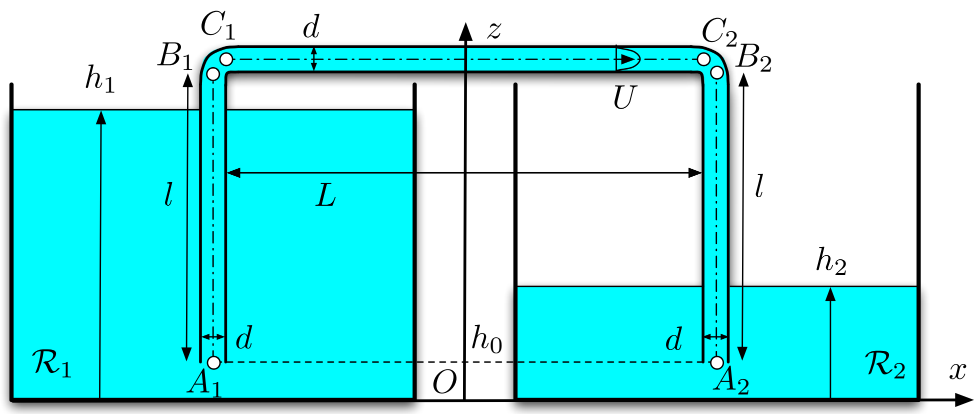

FIGURE **9**.1 – *Réservoirs reliés par un tube de section circulaire de diamètre d.*

On suppose que la capacité des réservoirs est suffisamment grande pour considérer que h_1 et h_2 ne varient pas avec le temps tandis qu'un champ de vitesse stationnaire $\underline{U}(\underline{x})$ existe dans le tube. La pression atmosphérique, considérée comme constante, vaut $p_a = 10^5$ Pa. La masse volumique de l'eau, considérée ici comme un fluide incompressible, vaut $\rho = 10^3$ kg.m^{-3}. Sa viscosité cinématique vaut $\nu = 10^{-6}$ m^2.s^{-1}. On prendra $g = 9.81$ m.s^{-2}.

Écoulement stationnaire dans un tube vertical

1) Dans un premier temps, on suppose que $h_1 = h_2 = h_e$ et que le fluide est au repos. En utilisant les équations de Navier-Stokes, donner l'expression de la pression $p(\underline{x})$ en un point quelconque $\underline{x} = x\,\underline{e}_x + y\,\underline{e}_y + z\,\underline{e}_z$ en fonction de h_e et des autres paramètres du problème.
2) On suppose maintenant que $h_1 > h_2$, ce qui induit une circulation d'eau du réservoir $\mathcal{R}_1$ vers le réservoir $\mathcal{R}_2$. On néglige le champ de vitesse dans les réservoirs et on suppose alors que la pression aux points A_1 et A_2 est la pression hydrostatique des réservoirs respectifs auxquels ils appartiennent. Exprimer leurs pressions respectives p_{A_1} et p_{A_2} ainsi que $p_{A_1} - p_{A_2}$.
3) En supposant connue la pression p_{B_1} au point B_1, on cherche une solution de la forme $\underline{U}(\underline{x}) = w(r)\,\underline{e}_z$ dans le tube vertical où r est la distance de $\underline{x}$ à l'axe A_1B_1. Montrer que $\underline{U}$ vérifie l'équation de conservation de la masse. On pourra raisonner en coordonnées cartésiennes ou bien utiliser la formule $\text{div}\,\underline{V} = \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$ de la divergence d'un champ de vecteur en coordonnées cylindriques.
4) Expliciter toutes les composantes de $\frac{dU}{dt}$ en coordonnées cartésiennes. En déduire que l'accélération est nulle pour le champ $\underline{U} = w(r)\,\underline{e}_z$ recherché.
5) Écrire les équations de Navier-Stokes pour le cas du champ de vitesse stationnaire $\underline{U} = w(r)\,\underline{e}_z$ recherché. On pourra raisonner en coordonnées cartésiennes ou bien utiliser les formules

$$\Delta\underline{V} = \left(\Delta V_r - \frac{2}{r^2}\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} - \frac{V_r}{r^2}\right)\,\underline{e}_r + \left(\Delta V_\theta + \frac{2}{r^2}\frac{\partial V_r}{\partial \theta} - \frac{V_\theta}{r^2}\right)\,\underline{e}_\theta + \Delta V_z\,\underline{e}_z$$

   et $\Delta B = \frac{\partial^2 B}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial B}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 B}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 B}{\partial z^2}$ en coordonnées cylindriques.
6) En déduire que $p = p_{A_1} - (\rho\,g + G_1)\,(z - h_0)$ dans le tube A_1B_1 où G_1 est une constante que l'on exprimera en fonction de p_{B1} et des autres paramètres.
7) On suppose que $w(r)$ est dérivable en $r = 0$. Écrire les conditions aux limites sur les parois du tube rigide. Exprimer alors $w(r)$ et tracer cette fonction.
8) Exprimer le débit volumique Q de l'eau dans le tube en fonction de G_1.

Écoulement stationnaire dans l'ensemble du tube

On suppose l'égalité des pressions $p_{B1} = p_{C_1}$ et $p_{B2} = p_{C_2}$ en négligeant les coudes.

9) On cherche le champ de vitesse stationnaire dans le tube horizontal sous la forme $\underline{U}(\underline{x}) = u(r)\,\underline{e}_x$ où r est maintenant la distance de $\underline{x}$ à l'axe C_1C_2 avec $\underline{OC_1} = -\frac{L}{2}\,\underline{e}_x + \left(h_0 + l + \frac{d}{2}\right)\,\underline{e}_z$ et $\underline{OC_2} = \frac{L}{2}\,\underline{e}_x + \left(h_0 + l + \frac{d}{2}\right)\,\underline{e}_z$. Vérifier que $\text{div}\,\underline{U} = 0$ et montrer que $p = p_{C_1} - G_0\,\left(x + \frac{L}{2}\right) - \rho\,g\,(z - z_*)$ où z_* est une constante que l'on exprimera et $G_0 = (p_{C_1} - p_{C_2})/L$.

10) En supposant connu $G_2 = (p_{B_2} - p_{A_2})/l + \rho\, g$, exprimer le champ de vitesse dans le tube vertical d'axe A_2B_2.
11) Montrer que G_1, G_0 et G_2 sont égaux à une valeur commune G que l'on exprimera en fonction de $p_{A_1} - p_{A_2}$ et de la longueur $L_{tot} = (2\,l + L)$ du tube.
12) En déduire que $Q = \frac{\pi\, d^4}{128} \frac{g\,(h_1 - h_2)}{\nu\, L_{tot}}$ et donner sa valeur pour $l = 1$ m, $L = 2$ m, $d = 4$ mm et $h_1 - h_2 = 50$ cm ?

Bilans intégraux de forces

13) Exprimer la résultante $\underline{I\!F}_{A_1B_1}$ des forces de contact exercées par l'extérieur du cylindre d'axe A_1B_1 sur ses sections circulaires de centres A_1 et B_1.
14) Exprimer la résultante $\underline{I\!F}_{\Sigma}$ des forces de contacts exercées sur le fluide par la paroi latérale du cylindre d'axe A_1B_1 de normales horizontales.
15) Exprimer $\underline{I\!F}_{A_1B_1} + \underline{I\!F}_{\Sigma}$ et commenter le résultat.
16) Exprimer la résultante $\underline{I\!F}_{C_1C_2}$ des forces de contact exercées par l'extérieur du cylindre C_1C_2 sur ses sections circulaires de centres C_1 et C_2 en fonction de G. Comparer cette force aux forces de frottement exercées par la paroi sur le fluide.
17) Calculer la résultante des forces de contact exercée sur toute la frontière du cylindre C_1C_2.

Corrigé Vases communicants

Écoulement stationnaire dans un tube vertical

1)Les équations de Navier-Stokes incompressibles pour un fluide au repos ($\underline{U} = \underline{0}$) s'écrivent $\underline{0} = -\underline{\text{grad}}\ p - \rho\, g\, \underline{e}_z$. En utilisant les conditions aux limites $p = p_a$ en $z = h_e$, on obtient la pression hydrostatique $p(\underline{x}) = p_a - \rho\, g\,(z - h_e)$. **2)**On a $p_{A_1} = p_a + \rho\, g\,(h_1 - h_0)$ et $p_{A_2} = p_a + \rho\, g\,(h_2 - h_0)$, d'où $p_{A_1} - p_{A_2} = \rho\, g\,(h_1 - h_2)$. **3)**La loi de conservation de la masse pour un fluide incompressible et homogène s'écrit div $\underline{U} = = 0$. Comme w ne dépend pas de z, cette relation est trivialement satisfaite. **4)**On a $\frac{d\underline{U}}{dt} = \left(u\,\frac{\partial u}{\partial x} + v\,\frac{\partial u}{\partial y} + w\,\frac{\partial w}{\partial z}\right)\underline{e}_x + \left(u\,\frac{\partial v}{\partial x} + v\,\frac{\partial v}{\partial y} + w\,\frac{\partial v}{\partial z}\right)\underline{e}_y + \left(u\,\frac{\partial w}{\partial x} + v\,\frac{\partial w}{\partial y} + w\,\frac{\partial w}{\partial z}\right)\underline{e}_z$. Comme $u = v = 0$ et $\frac{\partial w}{\partial z} = 0$, on a bien $\frac{d\underline{U}}{dt} = 0$. **5)**La conservation de la quantité de mouvement en coordonnées cartésiennes s'écrit $0 = -\frac{\partial p}{\partial x}$, $0 = -\frac{\partial p}{\partial y}$ et $0 = -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho\, g + \rho\,\nu\,\Delta w$ avec $\Delta w = w''(r) + \frac{1}{r}\, w'(r) = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\,\frac{dw}{dr}\right)$. **6)**Les équations $0 = -\frac{\partial p}{\partial x}$ et $0 = -\frac{\partial p}{\partial y}$ montrent que p ne dépend que de z. Les fonctions $-\frac{\partial p}{\partial z} - \rho\, g$ et $-\rho\,\nu\,\Delta w$ sont égales mais dépendent respectivement de z et de r. Elles sont donc égales à une constante, notée G_1, ce qui entraine que $p = p_{A_1} - (\rho\, g + G_1)\,(z - h_0)$ avec $G_1 = (p_{A_1} - p_{B_1})/l - \rho\, g$. **7)**Les conditions aux limites s'écrivent $w(d/2) = 0$. Comme $0 = G_1 + \rho\,\nu\,\Delta w(r)$, on a $\rho\,\nu\,\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\,\frac{dw}{dr}\right) = -G_1$ et donc $\rho\,\nu\, r\, w'(r) = -\frac{1}{2}\, G_1\, r^2 + Cste$. Comme $w'(0)$ est borné, la constante $Cste$ est nulle. En utilisant la condition aux limites $w(d/2) = 0$, on a $w(r) = \frac{G_1}{4\,\rho\,\nu}\left(\frac{1}{4}\, d^2 - r^2\right)$. Le tracé de cette fonction est celui d'une parabole. **8)**Le débit volumique est $Q = 2\,\pi\, \int_0^r w(r)\, r\, dr = \frac{G_1\,\pi\, d^4}{128\,\rho\,\nu}$.

Écoulement stationnaire dans l'ensemble du tube

9)On a bien div $\underline{U} = 0$ car u ne dépend pas de x. Les équations de conservation de la quantité de mouvement s'écrivent $0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho\,\nu\,\Delta u$, $0 = -\frac{\partial p}{\partial y}$ et $0 = -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho\,g$. On en déduit que $p = -\rho\,g\,z + F(x)$ où $F(x)$ est une fonction qui ne dépend que de x. Comme $-F'(x)$ et $-\rho\,\nu\,\Delta u$ sont égales et dépendent respectivement de x et r, elles sont égales à une constante notée G_0. On a donc $p = p_{C_1} - G_0\left(x + \frac{L}{2}\right) - \rho\,g\,(z - z_*)$ avec $z_* = h_0 + l + \frac{d}{2}$, la constante d'intégration étant obtenue en utilisant l'information $p = p_{C_1}$ au point C_1. Comme $p = p_{C_2}$ au point C_2, on en déduit que $G_0 = (p_{C_1} - p_{C_2})/L$. **10)**En suivant une démarche similaire à résolution effectuées le tube A_1B_1, on obtient $\underline{U} = -\frac{G_2}{4\,\rho\,\nu}\left(\frac{1}{4}\,d^2 - r^2\right)\underline{e}_z$ avec $G_2 = (p_{B_2} - p_{A_2})/l + \rho\,g$. **11)**Comme le débit Q est constant le long du tube, on a $G_1 = G_0 = G_2$ et on note G leur valeur commune. Comme on a supposé $p_{B_1} = p_{C_1}$ et $p_{C_2} = p_{B_2}$, on peut écrire $p_{A_1} - p_{A_2} = (p_{A_1} - p_{B_2} - \rho\,g\,l) + (p_{C_1} - p_{C_2}) + (p_{B_2} - p_{A_2} + \rho\,g\,l) = G_1\,l + G_0\,L + G_2\,l = G\,L_{tot}$. On a donc $G = \frac{p_{A_1} - p_{A_2}}{(2\,l + L)}$. **12)**Comme calculé précédemment, le débit est $Q = \frac{G\,\pi\,d^4}{128\,\rho\,\nu}$. Comme $G = \frac{p_{A_1} - p_{A_2}}{L_{tot}} = \frac{\rho\,g\,(h_2 - h_1)}{(2\,l + L)}$, le débit vaut $Q = \frac{g\,(h_2 - h_1)\,\pi\,d^4}{128(2\,l + L)\,\nu} = 7.7$ cm^3.s^{-1}.

Bilans intégraux de forces

13) On a $\underline{\underline{K}} = \underline{\underline{\text{grad}}}\,\underline{U} = w'(r)\,\underline{e}_r \otimes \underline{e}_z$ et donc $\underline{\underline{D}} = \frac{1}{2}\,w'(r)\,(\underline{e}_r \otimes \underline{e}_z + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_r)$ et $\underline{\underline{\sigma}} = -p\,\underline{\underline{I}} + 2\,\rho\,\nu\,\underline{\underline{D}}$. Sur la section de centre A_1 et de normale $-\underline{e}_z$, les forces de contact sont $\underline{T} = \underline{\underline{\sigma}} \cdot (-\underline{e}_z) = p_{A_1}\,\underline{e}_z - \rho\,\nu\,w'(r)\,\underline{e}_r$. Comme $\int_0^{2\pi} \underline{e}_r(\theta)\,d\theta = \underline{0}$ la résultante vaut $\underline{I\!\!F}_{A_1} = p_{A_1}\,S\,\underline{e}_z$ où $S = \pi\,d^2/4$ est la section du cylindre. On a de même $\underline{I\!\!F}_{B_1} = -p_{B_1}\,S\,\underline{e}_z$ si bien que $\underline{I\!\!F}_{A_1B_1} = \underline{I\!\!F}_{A_1} + \underline{I\!\!F}_{B_1} = (p_{A_1} - p_{B_1})\,\frac{\pi\,d^2}{4}\,\underline{e}_z$ avec $p_{A_1} - p_{B_1} = \rho\,g\,l + G_1\,l$ et $G_1 = G = (p_{A_1} - p_{A_2})/(2\,l + L)$. On a donc $\underline{I\!\!F}_{A_1B_1} = \rho\,g\,V_1\,\underline{e}_z + G\,V_1\,\underline{e}_z$ où $V_1 = \frac{\pi\,d^2\,l}{4}$ est le volume du cylindre A_1B_1. **14)**La normale en un point de la frontière latérale Σ étant $\underline{n} = \underline{e}_r$, les forces de contact s'écrivent $\underline{T} = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{e}_r = -p\,\underline{e}_r + \rho\,\nu\,w'(d/2)\,\underline{e}_z$ avec $w'(d/2) = -\frac{G_1\,d}{4\,\rho\,\nu}$. On a donc $\underline{T} = -p\,\underline{e}_r - G_1\,(d/4)\,\underline{e}_z$. Comme $\int_0^{2\pi} \underline{e}_r(\theta)\,d\theta = \underline{0}$, la résultante de ces forces est $\underline{I\!\!F}_\Sigma = -\int_0^l \int_0^{2\pi} G_1\,(d/4)\,\underline{e}_z\,d\theta\,dz = -G_1\,\frac{l\,\pi\,d^4}{4}\underline{e}_z = -G\,V_1\,\underline{e}_z$. **15)**La force $\underline{I\!\!F}_{A_1B_1} + \underline{I\!\!F}_\Sigma = \rho\,g\,V_1\,\underline{e}_z$ est l'opposée du poids du fluide compris dans le cylindre A_1B_1. **16)**En suivant la même démarche, on a $\underline{I\!\!F}_{C_1C_2} = G\,V_1\,\underline{e}_x$. Cette force compense les forces de frottement exercées par la paroi sur le fluide, c'est-à-dire la composante en $\underline{e}_x$ des forces de contact. **17)**Comme l'écoulement est stationnaire, la résultante des forces de contact exercées sur toute la frontière du cylindre C_1C_2 est l'opposée du poids du fluide et vaut donc $\rho\,g\,V_0\,\underline{e}_z$ avec $V_0 = \frac{\pi\,d^2\,L}{4}$.

NIVEAU IIb   Écoulement de Couette cylindrique

On rapelle tout d'abord quelques résultats de calcul différentiel en coordonnées cylindriques. Étant donné un champ scalaire $b(r, \theta, z)$, les composantes de son gradient en coordonnées cylindriques sont $\underline{\text{grad}}\;b = \frac{\partial b}{\partial r}\;\underline{e}_r + \frac{1}{r}\;\frac{\partial b}{\partial \theta}\;\underline{e}_\theta + \frac{db}{dz}\;\underline{e}_z$. Étant donné un champ de vecteurs $\underline{U}(r, \theta, z) = U_r\;\underline{e}_r + U_\theta\;\underline{e}_\theta + U_z\;\underline{e}_z$, les composantes en coordonnées cylindriques de son gradient sont

$$\underline{\underline{\text{grad}}}\ \underline{U} = \begin{pmatrix} \frac{\partial U_r}{\partial r} & \frac{1}{r}\left(\frac{\partial U_r}{\partial \theta} - U_\theta\right) & \frac{dU_r}{dz} \\ \frac{\partial U_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r}\left(\frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} + U_r\right) & \frac{dU_\theta}{dz} \\ \frac{\partial U_z}{\partial r} & \frac{1}{r}\frac{\partial U_z}{\partial \theta} & \frac{dU_z}{dz} \end{pmatrix} . \qquad (\mathbf{9}.1)$$

La divergence de $\underline{U}$ est obtenue en prenant la trace du tenseur gradient. On rappelle que le laplacien d'un champ b s'exprime sous la forme $\Delta b = \text{div}\ \underline{\text{grad}}\ b$.

Étant donné un champ de tenseurs *symétriques* d'ordre deux $\underline{\underline{A}}(\underline{x})$, les composantes en coordonnées cylindriques de sa divergence $\underline{B} = \underline{\text{div}}\ \underline{\underline{A}}$ s'écrivent

$$\begin{aligned} B_r &= \frac{\partial A_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{dA_{rz}}{dz} + \frac{A_{rr} - A_{\theta\theta}}{r} \\ B_\theta &= \frac{\partial A_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{dA_{\theta z}}{dz} + \frac{2\ A_{r\theta}}{r} \\ B_z &= \frac{\partial A_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{dA_{zz}}{dz} + \frac{A_{zr}}{r} . \qquad (\mathbf{9}.2) \end{aligned}$$

Étude de l'écoulement

On considère deux cylindres circulaires infiniment longs, coaxiaux, de rayons respectifs R_1 et $R_2 > R_1$. L'espace annulaire est rempli d'un fluide *pesant* et *newtonien* incompressible de masse volumique ρ. La constante de gravité est notée g. L'axe Oz des cylindres est vertical. Le mouvement du fluide ne résulte que de la rotation uniforme de chacun des cylindres : ω_1 pour le cylindre intérieur et ω_2 pour le cylindre extérieur. Le mouvement est supposé permanent ($\frac{\partial}{\partial t} = 0$) et de révolution ($\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$). De plus, on suppose que $U_z(r,z) = 0$. On veut montrer l'écoulement a pour solution $U_r = U_z = 0$,

$$U_\theta = \frac{A}{2} r + \frac{B}{r} , \qquad p(r,z) = p_0 - \rho\ g\ z + \rho \left(\frac{A^2 r^2}{8} + AB \ln r - \frac{B^2}{2r^2}\right) ,$$
$$A = 2 \left(\omega_2 \frac{R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} - \omega_1 \frac{R_1^2}{R_2^2 - R_1^2}\right) \quad \text{et} \quad B = (\omega_1 - \omega_2) \frac{R_1^2\ R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} . \ (\mathbf{9}.3)$$

1) Expliciter les équations du mouvement en coordonnées cylindriques ainsi que les conditions aux limites correspondant à cet écoulement.
2) Vérifier que la solution correspond bien au problème posé en détaillant les calculs.
3) Décrire l'ensemble des trajectoires $\underline{x}(t) = \underline{X}(\underline{a}, t)$ et calculer l'accélération $\underline{\Gamma}(\underline{a}, t)$ en coordonnées cylindriques.
4) Calculer les tenseurs des taux de déformation et de rotation $\underline{\underline{D}}$ et $\underline{\underline{\Omega}}$ en tout point (r, θ, z). Que se passe-t-il si $\omega_1 = \omega_2$? Expliquer.
5) Interpréter les composantes de $\underline{\underline{D}}$ (pour $\omega_1 \neq \omega_2$). Faire un dessin explicatif.

Étude des contraintes

On considère le sous-domaine $\mathcal{D}$ constitué d'une portion de fluide comprise entre deux plans horizontaux distants d'une longueur verticale L.

6) Montrer que la pression $p(r,z)$ est une fonction croissante de r pour z fixé.

7) Calculer le tenseur des contraintes visqueuses $\underline{\underline{\tau}}$ défini par $\underline{\underline{\sigma}} = -p\,\underline{\underline{I}} + \underline{\underline{\tau}}$.
8) Calculer la résultante et le moment $\underline{M}_1(\mathcal{D})$ en $\underline{0}$ des forces extérieures exercées sur le domaine fluide $\mathcal{D}$ par le cylindre intérieur. Même question pour le cylindre extérieur. Que se passe-t-il si $\omega_1 = \omega_2$?
9) Calculer la puissance $\mathcal{P}_1(\mathcal{D})$ des efforts extérieurs exercés sur $\mathcal{D}$ par le cylindre intérieur. Même question pour le cylindre extérieur.
10) Calculer les forces de contact $\underline{T}(\underline{x}, \underline{n})$ exercées sur une section $z =$ constante orientée vers le haut puis vers le bas. En déduire que la puissance des forces extérieures exercées sur $\mathcal{D}$ est $\mathcal{P}_{\text{ext}}(\mathcal{D}) = \mathcal{P}_1(\mathcal{D}) + \mathcal{P}_2(\mathcal{D})$. Commenter le signe de cette puissance. Que se passe-t-il si $\omega_1 = \omega_2$?

Étude thermodynamique

On suppose que les parois des cylindres sont adiabatiques (pas de flux de chaleur) et que la température est indépendante de z. À partir des résultats des questions précédentes, indiquer le signe de $\frac{d\mathcal{E}_{\text{int}}}{dt}$ où $\mathcal{E}_{\text{int}}$ est l'énergie interne du cylindre par unité de longueur.

11) On suppose que $e = C_p\,T$. Que peut-on dire de l'évolution de la température moyenne du cylindre au cours du temps ? Que se passe-t-il si $\omega_1 = \omega_2$?

On suppose que l'on utilise ce système commme coupleur hydraulique sur un treuil à moteur thermique. L'axe intérieur, de rayon $R_1 = 20$ cm tourne est entraîné par le moteur à la vitesse $\omega_1 = 3000$ tours/mn. Le tube cylindrique de longueur $L = 1$ m est rempli d'une huile de viscosité $\mu = .5$ Pa. Cette huile entraîne le cylindre extérieur de rayon $R_2 = 30$ cm à la vitesse angulaire ω_2. Pour un régime donnée, on constate que le moteur exerce un couple $M = 150$ Nm.

12) Calculer ω_2.
13) Calculer $\mathcal{P}_1(\mathcal{D})$ et $\mathcal{P}_2(\mathcal{D})$. En déduire la valeur $\mathcal{P}_{\text{ext}}(\mathcal{D})$.
14) Définir un rendement caractéristique du système que l'on calculera. Commenter l'utilisation de ce principe dans les coupleurs hydrauliques existants.

Corrigé Écoulement de Couette cylindrique

Étude de l'écoulement

1)Il faut écrire les équations de Navier Stokes incompressibles en coordonnées cylindriques à partir des informations fournies dans l'énoncé. L'équation de conservation de la masse div $\underline{U} = 0$ s'écrit en utilisant la relation div $\underline{U} =$ tr $(\underline{\underline{\text{grad}}}\ \underline{U})$. Le terme d'accélération de l'équation de conservation de la quantité de mouvement s'exprime en utilisant l'expression $\frac{d\underline{U}}{dt} = \frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + (\underline{\underline{\text{grad}}}\ \underline{U}) \cdot \underline{U}$. Le terme le plus difficile à exprimer en coordonnées cylindriques est le terme de dissipation $\mu_{\text{n}}\ \Delta\underline{U}$. Une première méthode consiste à revenir à l'expression du tenseur des contraintes visqueuses $\underline{\underline{\tau}}(\underline{\underline{D}}) = \lambda_{\text{n}}$ tr $(\underline{\underline{D}})\,\underline{\underline{I}} + 2\mu_{\text{n}}\ \underline{\underline{D}}$ où $\underline{\underline{D}}$ est la partie symétrique de $\underline{\underline{\text{grad}}}\ \underline{U}$. Comme div $\underline{U} = 0$, cette expression se réduit à $\underline{\underline{\tau}}(\underline{\underline{D}}) = 2\mu_{\text{n}}\ \underline{\underline{D}}$. Le terme de dissipation étant égal à $\underline{\text{div}}\,\underline{\underline{\tau}}$, on voit donc que $\Delta\underline{U} = 2\underline{\text{div}}\,\underline{\underline{D}}$ dans le cas où div $\underline{U} = 0$. L'expansion de cette expression se simplifie alors en utilisant l'expansion des relations $\frac{\partial}{\partial r}(\text{div}\ \underline{U}) = 0$, $\frac{\partial}{\partial \theta}(\text{div}\ \underline{U}) = 0$

et $\frac{\partial}{\partial z}(\text{div } \underline{U}) = 0$. Les équations du mouvement sont donc

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial U_z}{\partial z} + \frac{U_r}{r} &= 0 \\
\frac{\partial U_r}{\partial t} + U_r \frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{U_\theta}{r}\frac{\partial U_r}{\partial \theta} - \frac{{U_\theta}^2}{r} + U_z \frac{\partial U_r}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial r} + \nu_\mathrm{n}\, \Delta_r \\
\frac{\partial U_\theta}{\partial t} + U_r \frac{\partial U_\theta}{\partial r} + \frac{U_\theta}{r}\frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} - \frac{U_r U_\theta}{r} + U_z \frac{\partial U_\theta}{\partial z} &= -\frac{1}{r\rho_0}\frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu_\mathrm{n}\, \Delta_\theta \\
\frac{\partial U_z}{\partial t} + U_r \frac{\partial U_z}{\partial r} + \frac{U_\theta}{r}\frac{\partial U_z}{\partial \theta} + U_z \frac{\partial U_z}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial z} - g + \nu_\mathrm{n}\, \Delta_z \ ,
\end{aligned}$$

avec $\Delta \underline{U} = \Delta_r \underline{e}_r + \Delta_\theta \underline{e}_\theta + \Delta_z \underline{e}_z$ tel que

$$\Delta_r = \Delta U_r - \frac{2}{r^2}\frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} - \frac{U_r}{r^2} \ , \quad \Delta_\theta = \Delta U_\theta + \frac{2}{r^2}\frac{\partial U_r}{\partial \theta} - \frac{U_\theta}{r^2} \ , \quad \Delta_z = \Delta U_z \ . \quad (\mathbf{9}.4)$$

Le Laplacien scalaire s'écrit

$$\Delta b = \text{div}\,(\underline{\text{grad}}\ b) = \frac{\partial^2 b}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 b}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial b}{\partial r} + \frac{\partial^2 b}{\partial z^2} \ . \quad (\mathbf{9}.5)$$

Une autre manière d'exprimer $\Delta \underline{U}$ est de remarquer que $\Delta \underline{U} = -\underline{\text{rot}}\ \underline{\text{rot}}\ \underline{U}$ dans le cas particulier div $\underline{U} = 0$. L'expression en coordonnées cylindriques du rotationnel s'obtient en calculant la partie antisymétrique de la matrice gradient d'un champ de vecteur. Cette méthode est encore plus fastidieuse que la première. Les conditions aux limites de l'écoulement sont $U_r = U_z = 0$, $U_\theta = \omega_1 R_1$ pour $r = R_1$ et $U_r = U_z = 0$, $U_\theta = \omega_2 R_2$ pour $r = R_2$.
2)Les seuls termes des équations qui ne sont pas nuls vérifient $-\frac{{U_\theta}^2}{r} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial r}$, $0 = \nu_\mathrm{n}\left(\frac{\partial^2 U_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial U_\theta}{\partial r} - \frac{U_\theta}{r^2}\right)$ et $0 = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial z} - g$. On vérifie alors facilement que ces équations ainsi que les conditions aux limites sont satisfaites par les solutions analytiques de l'énoncé.
3)Les trajectoires sont des cercles d'équations $r(t) = r_0$, $\theta(t) = \theta_0 + U_\theta(r_0)t$ et $z = z_0$. L'accélération est donnée par $\Gamma_r = -{U_\theta}^2/r_0$, $\Gamma_\theta = \Gamma_z = 0$.
4)Les seuls composantes non nulles sont $D_{rr} = D_{\theta\theta} = -B/r^2 = \frac{\omega_2-\omega_1}{r^2}\ \frac{R_1^2 R_2^2}{R_2^2-R_1^2}$ et $\Omega_{r\theta} = -\Omega_{\theta r} = -A/2 = \frac{\omega_1 R_1^2 - \omega_2 R_2^2}{R_2^2-R_1^2}$. Dans le cas $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ on a $\underline{\underline{D}} = 0$ et $\Omega_{r\theta} = -\Omega_{\theta r} = \omega$: c'est un mouvement de rotation solide.
5)Si $\omega_2 > \omega_1$ alors B est positif, U_θ croît avec r et $D_{r\theta} = -B/r^2 < 0$. L'angle de glissement $\gamma(t)$ entre $\underline{e}_r$ et $\underline{e}_\theta$ décroît comme $\gamma(t) \sim -D_{r\theta}\, t/r^2$ au voisinage de $t = 0$. Un schéma permet de relier ce comportement avec le fait que $U_\theta(r)$ croît avec r.

Étude des contraintes

6)Comme $\frac{\partial r}{\partial r} = \rho_0\, {U_\theta}^2/r > 0$ la fonction $p(r)$ est croissante.
7)Les seules composantes non nulles sont $\tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} = -2\mu_\mathrm{n}\ B/r^2$.
8)Les forces extérieures par unité de surface exercéees par les cylindres sur le fluide sont la somme des forces de pression $-p(R_1, z)\underline{e}_r$ et des forces visqueuses $-\underline{\underline{\tau}}(R_1)\underline{e}_r = -2\mu_\mathrm{n}\ B/R_1^2\ \underline{e}_\theta = -2\mu_\mathrm{n}\ \frac{\omega_2-\omega_1}{R_2^2-R_1^2} R_2^2\ \underline{e}_\theta$ pour le cylindre intérieur et $p(R_2, z)\underline{e}_r$ et $\underline{\underline{\tau}}(R_2)\underline{e}_r = 2\mu_\mathrm{n}\ B/R_2^2\ \underline{e}_\theta = 2\mu_\mathrm{n}\ \frac{\omega_2-\omega_1}{R_2^2-R_1^2} R_1^2\ \underline{e}_\theta$ pour le cylindre extérieur. Si $\omega_2 > \omega_1$ le cylindre intérieur freine le fluide tandis que le cylindre extérieur l'accélère. Par symètrie, on voit que la résultante des ces forces par

unité de surface est nulle lorsque l'on intègre sur une unité de longeur verticale. En ce qui concerne le moment en un point $\underline{0}$ situé sur l'axe, seules les forces visqueuses ont une contribution.
Le moment exercé sur le sous-domaine $\mathcal{D}$ par le cylindre intérieur est alors $\underline{M}_1(\mathcal{D}) = -L\int_0^{2\pi} R_1 \underline{e}_r \wedge \underline{\underline{\tau}}(R_1)\cdot \underline{e}_r R_1 \, d\theta = 4\pi\mu_{\text{n}} \, B\underline{e}_3$. Il est égal à $\underline{M}_2(\mathcal{D}) = L\int_0^{2\pi} R_2 \, \underline{e}_r \wedge \underline{\underline{\tau}}(R_2)\cdot \underline{e}_r R_2 \, d\theta = -4\pi\mu_{\text{n}} \, B\underline{e}_3$ pour le cylindre extérieur.
On vérifie que la conservation du moment cinétique $\underline{M}_1(\mathcal{D}) + \underline{M}_2(\mathcal{D}) = 0$ est vérifiée. Dans le cas de la rotation solide $\omega_2 = \omega_1$ on a la relation $\underline{M}_1(\mathcal{D}) = \underline{M}_2(\mathcal{D}) = \underline{0}$.
9)Les puissances sont $\mathcal{P}_1(\mathcal{D}) = L\int_0^{2\pi} \underline{\underline{\tau}}(R_1)\omega_1 \underline{e}_r R_1 \underline{e}_\theta R_1 \, d\theta = 4\pi L\mu_{\text{n}} \, B\omega_1$ pour le cylindre intérieur et $\mathcal{P}_2(\mathcal{D}) = L\int_0^{2\pi} \underline{\underline{\tau}}(R_2)\omega_2 \underline{e}_r R_2 \underline{e}_\theta R_2 \, d\theta = 4\pi L\mu_{\text{n}} \, B\omega_2$ pour le cylindre extérieur. On vérifie que $\mathcal{P}_1(\mathcal{D}) = \underline{M}_1(\mathcal{D})\cdot\omega_1 \underline{e}_z$ et $\mathcal{P}_2(\mathcal{D}) = \underline{M}_2(\mathcal{D})\cdot\omega_2 \, \underline{e}_z$.
10) Dans les cas $\underline{n} = \underline{e}_3$ (haut) et $\underline{n} = -\underline{e}_3$ (bas) on a $\underline{T}(\underline{x},\underline{n}) = -p(r)\underline{n}$. Comme $\underline{U}\cdot\underline{e}_3 = 0$ la puissance $L\int_{R_1\le r\le R_2} \underline{T}(\underline{x},\underline{n})\cdot\underline{U} \, dS$ est nulle. Comme la puissance des forces de gravité est elle aussi nulle, on a $\mathcal{P}_{\text{ext}}(\mathcal{D}) = \mathcal{P}_1(\mathcal{D}) + \mathcal{P}_2(\mathcal{D}) = 4\pi L\mu_{\text{n}} \, \frac{(\omega_2-\omega_1)^2}{R_2^2-R_1^2} R_1^2 R_2^2 > 0$. On a $\mathcal{P}_{\text{ext}}(\mathcal{D}) = 0$ dans le cas $\omega_2 = \omega_1$.

Étude thermodynamique

11) Le premier principe $\frac{d}{dt}\mathcal{E}_{\text{int}}(\mathcal{D}) + \frac{d}{dt}\mathcal{K}(\mathcal{D}) = \mathcal{P}_{\text{ext}}(\mathcal{D}) + \mathcal{P}_{\text{int}}(\mathcal{D})$ s'écrit ici $\frac{d}{dt}\mathcal{E}_{\text{int}}(\mathcal{D}) = \mathcal{P}_{\text{ext}}(\mathcal{D})$. On a donc $\frac{d}{dt}\mathcal{E}_{\text{int}} > 0$. La température moyenne T_m, définie par $\rho_0 C_p T_m = \mathcal{E}_{\text{int}}(\mathcal{D})/[2\pi L(R_2^2 - R_1^2)$ est donc croissante. Cet échauffement est dû à la dissipation visqueuse qui transforme l'énergie mécanique en chaleur. Dans le cas de la rotation solide il n'y a pas d'échauffement.
12) Ici $\omega_1 > \omega_2$. En notant $\underline{M}_1(\mathcal{D}) = -\underline{M}_2(\mathcal{D}) = M\underline{e}_3$ on a $M = 4l\pi\mu_{\text{n}} \, (\omega_1 - \omega_2) R_1^2 R_2^2/(R_2^2 - R_1^2) = 150$ Nm. Donc $\omega_2 = \omega_1 - \frac{M}{4l\pi\mu_{\text{n}}} \frac{R_2^2 - R_1^2}{R_1^2 R_2^2} = 16.82 \text{ s}^{-1}$ ce qui donne $w_2 = 1010$ tours/mn.
13) Les puissances sont $\mathcal{P}_1(\mathcal{D}) = M\omega_1 = 7.5$ kW et $\mathcal{P}_2(\mathcal{D}) = -M\omega_2 = 2.5$ kW. On a donc $\mathcal{P}_{\text{ext}}(\mathcal{D}) = \mathcal{P}_1(\mathcal{D}) + \mathcal{P}_2(\mathcal{D}) = 5$ kW
14) Le rendement est égale à la puissance $-\mathcal{P}_2(\mathcal{D})$ fournie par le fluide au cylindre extérieur divisée par la puissance $\mathcal{P}_1(\mathcal{D})$ fournie par cylindre intérieur au fluide, c'est-à-dire par le moteur. On obtient donc un rendement de un tiers. Les deux tiers de l'énergie mécanique fournie par le moteur sont dissipés sous forme de chaleur. Le rendement de ce coupleur mécanique est faible.

2 Exercices de niveau III

NIVEAU IIIa Mouvement plan de fluide

On considère un fluide en mouvement de masse volumique ρ_0 et de vitesse $\underline{U}(\underline{x},t)$ définie par $U_1 = \alpha \, x_1$, $U_2 = -\alpha \, x_2$ et $U_3 = 0$ où α est une constante. On suppose les forces extérieures s'écrivent $\underline{f}(\underline{x},t) = -\rho_0 \, g \, \underline{e}_3$ où g est la gravité. On note μ la viscosité dynamique du fluide.

1) Exprimer le vecteur rotation $\underline{\omega}(\underline{x},t)$ et le tenseur des déformations $\underline{\underline{D}}(\underline{x},t)$.
2) On considère le domaine $\mathcal{D}(0) = \{\underline{a} \in I\!R^3 : a_1^2 + a_2^2 \le l^2 \text{ et } 0 \le a_3 \le h\}$ et on note $\mathcal{D}(t)$ son évolution au cours du temps sous l'action du mouvement $\underline{U}(\underline{x},t)$. Quelle est la forme de $\mathcal{D}(0)$? Dessiner cette forme.

3) Montrer que le volume du domaine $\mathcal{D}(t)$ est une constant V_0 que l'on calculera.
4) Donner l'expression de la déformation $\underline{X}(\underline{a}, t)$ en supposant que $\underline{X}(\underline{a}, 0) = \underline{a}$.
5) Montrer que $x_1(t)\, x_2(t) = a_1\, a_2$. En déduire le tracé des trajectoires dans un plan $x_3 = a_3$.
6) Tracer les lignes de champs de la vitesse au temps $t = 0$.
7) On considère un champ $B(\underline{x}, t) = \frac{\gamma}{2}\left(x_1^2\, e^{-2\alpha\, t} + x_2^2\, e^{2\alpha\, t}\right)$. Calculer l'expression lagrangienne $B^{(L)}(\underline{a}, t)$ de ce champ.
8) Que vaut $\frac{dB}{dt}(\underline{x}, t)$?
9) Calculer $\frac{\partial B}{\partial t}$ et $\underline{U} \cdot \underline{\mathrm{grad}}\, B$ et comparer avec la question précédente.
10) Remplacer l'expression du champ de vitesse dans les équations de Navier-Stokes.
11) En supposant la pression $p(\underline{0}, t) = p_0$ constante en $\underline{x} = \underline{0}$ et pour tout temps t, calculer le champ de pression $p(\underline{x}, t)$.
12) Donner l'expression de densité surfacique de forces de contact $\underline{T}(\underline{x}, \underline{n})$ pour $\underline{x} = \frac{1}{2}\, h\, \underline{e}_3$ et $\underline{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(\underline{e}_1 + \underline{e}_2)$.

NIVEAU IIIb Rotations d'axe vertical

NB : bien qu'elles ne soient pas indispensables pour la résolution du problème, les formules suivantes relatives aux coordonnées cylindriques sont rappellées ici : $\underline{\mathrm{grad}}\, B(\underline{x}) = B_{,r}\, \underline{e}_r + \frac{1}{r} B_{,\theta}\, \underline{e}_\theta + B_{,z}\, \underline{e}_z$, $\underline{\underline{\mathrm{grad}}}\, V = V_{r,r}\, \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + \frac{1}{r}\,(V_{r,\theta} - V_\theta)\, \underline{e}_r \otimes \underline{e}_\theta + V_{r,z}\, \underline{e}_r \otimes \underline{e}_z + V_{\theta,r}\, \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_r + \frac{1}{r}\,(V_{\theta,\theta} + V_r)\, \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta + V_{\theta,z}\, \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_z + V_{z,r}\, \underline{e}_z \otimes \underline{e}_r + \frac{1}{r}\, V_{z,\theta}\, \underline{e}_z \otimes \underline{e}_\theta + V_{z,z}\, \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z$, $\mathrm{div}\, \underline{V} = V_{r,r} + \frac{1}{r}\, V_{\theta,\theta} + \frac{1}{r}\, V_r + V_{z,z}$ et $\Delta B = B_{,rr} + \frac{1}{r}\, B_{,r} + \frac{1}{r^2}\, B_{,\theta\theta} + B_{,zz}$.

Rotation dans un solide

On considère un solide élastique homogène et isotrope dont la configuration de référence est exempte de contraintes et occupe le volume :

$$\Omega_0 = \{\underline{a} \in I\!R \ : \ 0 < R_1 \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \leq R_2 \quad \text{et} \quad 0 \leq a_3 \leq l\}\ .$$

On définit les coordonées polaires (R, Θ) dans la configuration de référence par le changement de variables $(a_1, a_2) = (R\, \cos\Theta, R\, \sin\Theta)$. On définit ensuite les vecteurs de base par $\underline{e}_R(\Theta) = \cos\Theta\ \underline{e}_1 + \sin\Theta\ \underline{e}_2$ et $\underline{e}_\Theta(\Theta) = -\sin\Theta\ \underline{e}_1 + \cos\Theta\ \underline{e}_2$.
On examine la déformation dont le champ de déplacement est $\underline{\xi}(\underline{a}) = \alpha\, R\, \underline{e}_\Theta(\Theta)$ en coordonnées polaires. On suppose que $\alpha \ll 1$.

1) Décrire et dessiner le volume Ω occupé par la configuration déformée.
2) Exprimer les composantes de $\underline{\xi}$ en coordonnées cartésiennes.
3) Calculer le tenseur des petites déformations associé à cette déformation.
4) Calculer les tenseurs des contraintes $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{a})$ pour tout point de Ω.

Fluide incompressible avec surface libre

On considère un écoulement à surface libre occupant le volume

$$\Omega = \left\{ \underline{x} \quad \text{tels que} \quad r \leq R_m \quad \text{et} \quad 0 \leq z \leq h(r) \quad \text{avec} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} \right\}$$

où R_m est le rayon de la cuve et $h(r)$ le profil de la surface libre que l'on cherche à déterminer. Le champ de gravité $-g \, \underline{e}_z$ est parallèle à l'axe de la cuve. On suppose que la cuve est remplie d'un fluide incompressible de masse volumique homogène ρ_0, et animé du mouvement $\underline{U}(r, \theta, z) = V(r) \, \underline{e}_\theta(\theta)$ où (r, θ, z) sont les coordonnées cylindriques et $V(r)$ un profil de vitesse. On suppose que le fluide est visqueux et que le mouvement vérifie $V(r) = \omega \, r$.

5) Écrire les équations de Navier-Stokes incompressibles en coordonnées cartésiennes en remplaçant le champ de vitesse par son expression.
6) Indiquer l'expression du tenseur des contraintes $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t)$ en fonction du champ de pression p pour l'instant indéterminé.
7) On suppose que la pression atmosphérique p_a est constante. Indiquer la condition aux limites que l'on doit imposer sur la surface libre d'équation $z = h(r)$ en supposant la continuité des forces de contact.
8) Montrer que le champ de pression s'écrit sous la forme $p = p_c(z, t) + \beta \, (x^2 + y^2)$ où β est un constante que l'on explicitera.
9) Préciser le profil de pression $p_c(z, t)$ en appliquant la condition aux limites en $\underline{x} = h_0 \, \underline{e}_z$ en supposant que $h(0) = h_0$ est connu.
10) En déduire la forme de cette surface libre. En faire un tracé schématique.
11) On suppose $\omega = .5$ Hz, $R_m = 1$ m. Calculer la différence de hauteur maximale entre les points de la surface libre pour $g = 9.81$ m/s^2.

Fluide compressible à toit rigide

On considère un écoulement occupant le volume

$$\Omega = \left\{ \underline{x} \quad \text{tels que} \quad r \leq R_m \quad \text{et} \quad 0 \leq z \leq h_m \quad \text{avec} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} \right\}$$

où R_m et h_m sont respectivement le rayon et la hauteur de la cuve à toit rigide. Le champ de gravité est $-g \, \underline{e}_z$. On suppose que la cuve fermée est entièrement remplie d'un fluide parfait compressible et que l'ensemble est animé du mouvement de rotation solide $\underline{U}(r, \theta, z) = \omega \, r \, \underline{e}_\theta(\theta)$ où (r, θ, z) sont les coordonnées cylindriques. On suppose que le fluide est un gaz parfait de masse molaire M. On suppose que la température $T = T_0$ est homogène et on cherche le champ de masse volumique solution sous une forme $\rho = \rho_e(r, z)$ qui ne dépend que de r et de z.

12) Écrire les équations d'Euler compressibles en remplaçant $\underline{U}$ par sa valeur.
13) Montrer que l'hypothèse $\rho = \rho_e(r, z)$ et le champ de vitesse proposé sont compatibles avec l'équation de conservation de la masse.
14) Ecrire les équations de conservation de la quantité de mouvement en coordonnées cylindriques en remplaçant le champ de vitesse par sa valeur.
15) En éliminant p, déduire des équations d'état et des équations d'Euler compressibles que la masse volumique est de la forme $\rho_e(r, z) = \rho_c(z) \, e^{\frac{\omega^2 \, r^2}{2 \, \alpha}}$ où α est une constante que l'on précisera.

16) On suppose que $\rho(\underline{0}, t) = \rho_e(0, 0) = \rho_0$ est connu. Donner l'expression du profil de masse volumique $\rho_c(z)$ au centre de la cuve.
17) En déduire l'expression du champ de pression $p(\underline{x}, t)$.
18) Faire un tracé schématique des isobares dans un plan horizontal.