Exercices pour le chapitre 5 : Équations de Lamé

Version 9 septembre 2018

1 Exercices de niveau I

NIVEAU I Questions simples

1) Expliciter les composantes C_{IK} pour $I = 1, ..., 6$ et $K = 1, ..., 6$ de la matrice 6×6 correspondant à la loi de Hooke dans le cas homogène et isotrope, en notant λ et μ les coefficients de Lamé.

> On a $C_{11} = C_{22} = C_{33} = \lambda + 2\,\mu$, $C_{23} = C_{31} = C_{12} = \lambda$, $C_{32} = C_{13} = C_{21} = \lambda$, $C_{44} = C_{55} = C_{66} = 2\,\mu$ et $C_{ij} = 0$ sinon.

2) On considère le champ de déplacement $\underline{\xi} = k\,(a_2^2\,\underline{e}_1 + a_3^2\,\underline{e}_2 + a_1^2\,\underline{e}_3)$ où k est un paramètre constant. On se place sous l'hypothèse des petites perturbations. Calculer $\underline{\underline{\sigma}}$ en supposant la loi de Hooke vérifiée. En déduire la densité volumique des forces de contact $\underline{f}_{\text{cont}} = \underline{\text{div}}\,\underline{\underline{\sigma}}$. Comparer avec les expressions de $\underline{\text{grad}}\,(\text{div}\,\underline{\xi})$ et $\Delta\underline{\xi}$.

> On a $\epsilon_{23} = \epsilon_{32} = k\,a_2$, $\epsilon_{31} = \epsilon_{13} = k\,a_3$, $\epsilon_{12} = \epsilon_{13} = k\,a_1$ et $\epsilon_{11} = \epsilon_{22} = \epsilon_{33} = 0$. Comme $\text{tr}\,\underline{\underline{\epsilon}} = 0$, on a $\underline{\underline{\sigma}} = 2\,\mu\,\underline{\underline{\epsilon}}$. On a $\underline{f} = -\underline{\text{div}}\,\underline{\underline{\sigma}} = -2\,\mu\,k\,(\underline{e}_1 + \underline{e}_2 + \underline{e}_3)$. Comme $\text{div}\,\underline{\xi} = 0$ et $\Delta\underline{\xi} = 2\,k\,(\underline{e}_1 + \underline{e}_2 + \underline{e}_3)$, on a bien $\underline{\text{div}}\,\underline{\underline{\sigma}} = (\lambda + \mu)\,\underline{\text{grad}}\,(\text{div}\,\underline{\xi}) + \mu\,\Delta\underline{\xi}$.

3) Expliciter les composantes ϵ_{ij} de $\underline{\underline{\epsilon}}$ en fonction des composantes σ_{ij} de $\underline{\underline{\sigma}}$ à l'aide de la loi de Hooke inverse.

> On a $\epsilon_{ij} = -\frac{\nu}{E}\,\sigma_{ll}\,\delta_{ij} + \frac{1+\nu}{E}\,\sigma_{ij}$.

2 Exercices de niveau II

NIVEAU II Traction uniaxiale

On considère un parallélépipède rectangle Ω_0 de longueur l_1, l_2 et l_3, composé d'un matériau élastique homogène et isotrope. On suppose qu'il est non contraint et que sa densité est ρ_0. On connaît son module de Young E et son coefficient de Poisson ν. On choisit les axes orthonormés Oa_1, Oa_2 et Oa_3 parallèles aux arêtes.

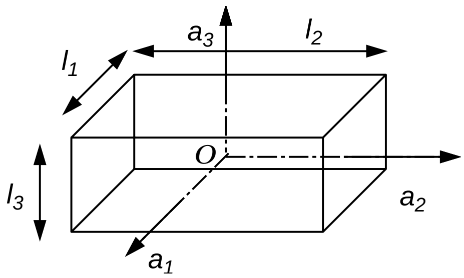

FIGURE **5**.1 – Parallélépipède rectangle élastique.

Petite traction

On effectue une expérience de traction sur le solide en appliquant des forces de contact à sa surface. On s'intéresse ici à l'état équilibre (pas de dépendance en temps). On mesure alors le champ de déplacement $\underline{\xi}(\underline{a})$ qui est égal à

$$\xi_1 = \Delta_1\, a_1 \;, \qquad \xi_2 = -\nu \Delta_1\, a_2 \;, \qquad \xi_3 = -\nu \Delta_1\, a_3 \;. \tag{5.1}$$

On suppose que Δ_1 est très petit devant un : $\Delta_1 \ll 1$. On rappelle que la loi de Hooke permet d'exprimer $\underline{\underline{\sigma}}$ en fonction de $\underline{\underline{\epsilon}}$ à l'aide des coefficients de Lamé, ou $\underline{\underline{\epsilon}}$ en fonction de $\underline{\underline{\sigma}}$ à l'aide du module de Young et du coefficient de Poisson.

1) Calculer le tenseur des petites déformation $\underline{\underline{\epsilon}}(\underline{a})$. Montrer que l'on est dans le cadre des petites déformations.

Le tenseur des petites déformation $\underline{\underline{\epsilon}}$ est tel que $\epsilon_{11} = \Delta_1$, $\epsilon_{22} = \epsilon_{33} = -\nu\, \Delta_1$ et $\epsilon_{ij} = 0$ sinon. On est bien dans le cadre des peites déformation puisque ses composantes sont donc toutes d'ordre $\Delta_1 \ll 1$.

2) Appliquer la loi de Hooke pour calculer le tenseur des contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$ en tout point, en fonction de E et Δ_1 uniquement. On pourra utiliser les expression de λ et μ en fonction de E et ν.

On a $\underline{\underline{\sigma}} = \lambda\,(\mathrm{tr}\, \underline{\underline{\epsilon}})\, \underline{\underline{I}} + 2\,\mu\, \underline{\underline{\epsilon}} = \lambda\,(1-2\,\nu)\,\Delta_1 \underline{\underline{I}} + 2\,\mu\, \underline{\underline{\epsilon}}$. On a donc $\sigma_{11} = \lambda\,(1-2\,\nu)\,\Delta_1 + 2\,\mu\,\Delta_1 = \Delta_1\, E$, $\sigma_{22} = \sigma_{33} = \lambda\,(1-2\,\nu)\,\Delta_1 - 2\,\mu\,\Delta_1 = 0$, $\sigma_{ij} = 0$ sinon. Donc $\underline{\underline{\sigma}} = E\, \Delta_1\, \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1$.

3) En déduire l'expression des forces extérieures de contact $\underline{T}(\underline{a}, \underline{n})$ pour cette expérience. Calculer les forces volumiques extérieures $\underline{f}(\underline{a})$ en supposant que le solide est à l'équilibre.

Sur les faces de normales $\pm\underline{e}_1$, on a $\underline{T}(\underline{a}, \pm\underline{e}_1) = \pm F\, \underline{e}_1$ avec $F = E\,\Delta_1 = E\,\Delta_1$. Sur les autres faces, $\underline{T}(\underline{a}, \underline{n}) = \underline{0}$. Comme l'accélération $\frac{\partial^2}{\partial t^2}\underline{\xi}$ est nulle, on a $\underline{f} + \underline{\mathrm{div}}\, \underline{\underline{\sigma}} = 0$. Comme $\underline{\mathrm{div}}\, \underline{\underline{\sigma}} = \underline{0}$ (coefficients constants), on a $\underline{f} = \underline{0}$.

4) Interpréter physiquement cette expérience de petite traction en termes d'allongement de la pièce élastique.

La force surfacique $\pm F\, \underline{e}_1$ est appliquée sur les faces de normales $\pm\underline{e}_1$. La pièce subit alors un allongement $\Delta_1 = F/E$ dans la direction $\underline{e}_1$ et les compressions $\Delta_2 = \Delta_3 = -\nu\, \Delta_1$ dans les deux autres directions.

Cisaillement

On suppose maintenant que $l_2 = l_3 = l$. On effectue un expérience de cisaillement sur le solide en appliquant des forces de contact à sa surface. On mesure alors le champ de déplacement $\underline{\xi}(\underline{a})$ qui est égal à

$$\xi_1 = 0 \;, \quad \xi_2 = k\, a_3 \;, \quad \xi_3 = k\, a_2 \;. \tag{5.2}$$

On suppose que k est très petit devant un : $k \ll 1$.

5) Calculer le tenseur des petites déformations $\underline{\underline{\epsilon}}$. Justifier que l'on est dans le cadre des petites déformations.

> On a $\epsilon_{23} = \epsilon_{32} = k$ et $\epsilon_{ij} = 0$ sinon. On est bien dans le cadre des peites déformation puisque ses composantes sont donc toutes d'ordre $k \ll 1$.

6) Appliquer la loi de Hooke pour calculer le tenseur des contraintes en tout point, en fonction de μ et k uniquement. En déduire l'expression de $\underline{\underline{\sigma}}$ en fonction de μ et de l'angle de glissement γ_{23} uniquement.

> Comme tr $\underline{\underline{\epsilon}} = 0$, on a $\underline{\underline{\sigma}} = 2\,\mu\,\underline{\underline{\epsilon}} = \mu\,\gamma_{23}\,(\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_3 + \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_2)$.

7) En déduire les forces extérieures de contact $\underline{T}(\underline{a}, \underline{n})$ exercées lors de l'expérience et dessiner un schéma pour les représenter. Calculer les forces volumiques extérieures $\underline{f}(\underline{a})$ en supposant que le solide est à l'équilibre.

> Sur les faces de normales $\pm\underline{e}_2$, on a $\underline{T}(\underline{a}, \pm\underline{e}_2) = F\,\underline{e}_3$ avec $F = \mu\,\gamma_{23}$. Sur les faces de normales $\pm\underline{e}_3$, on a $\underline{T}(\underline{a}, \pm\underline{e}_3) = F\,\underline{e}_2$. Sur les autres faces, les forces de contact sont nulles. Comme l'accélération $\frac{\partial^2}{\partial t^2}\underline{\xi}$ est nulle, on a $\underline{f} + \underline{\mathrm{div}}\,\underline{\underline{\sigma}} = 0$. Comme $\underline{\mathrm{div}}\,\underline{\underline{\sigma}} = \underline{0}$ (coefficients constants), on a $\underline{f} = \underline{0}$.

8) Interpréter physiquement cette expérience de petit cisaillement sur le solide. A quoi correspondent les directions principales du tenseur des déformations ? Comparer ces directions principales à celles du tenseur de contraintes. Interpréter.

> Il s'agit d'une expérience de cisaillement où l'applique des forces tangentielles $\pm F\,\underline{e}_3$ sur les faces de normales $\pm\underline{e}_2$ et $\pm F\,\underline{e}_2$ sur les faces de normales $\pm\underline{e}_3$. La réponse du solide est un glissement d'ange $\gamma_{23} = F/\mu$. Les directions principales de $\underline{\underline{\epsilon}}$ sont $\underline{n}^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(\underline{e}_2 + \underline{e}_3)$ et $\underline{n}^- = \frac{1}{\sqrt{2}}(\underline{e}_2 - \underline{e}_3)$ avec des allongements relatifs associés $\Delta^+ = \gamma_{23}/2$ et $\Delta^+ = -\gamma_{23}/2$. Dans la base $(\underline{e}_1, \underline{n}^+, \underline{n}^-)$, le tenseur des petites déformations est diagonal et s'écrit $\underline{\underline{\epsilon}} = \Delta^+\,(\underline{n}^+ \otimes \underline{n}^+ + \underline{n}^- \otimes \underline{n}^-)$. La tenseur de contraintes admet les mêmes directions principales. On peut voir l'expérience de cisaillement comme une expérience de traction dans la direction $\underline{n}^+$ superposée à une expérience de compression dans la direction $\underline{n}^-$.

3 Exercices de niveau III

NIVEAU III Torsion d'un arbre métallique

On considère une piéce métallique homogène contenue dans le domaine

$$\Omega_0 = \{\underline{a} \in I\!R^3 \mid (a_1^2 + a_2^2) \leq R^2 \;\text{ et }\; 0 \leq a_3 \leq L\}\,. \qquad (\mathbf{5}.3)$$

On note ρ_0 sa masse volumique. On note λ et μ ses coefficients de Lamé. Dans tout ce qui suit, on suppose que la section circulaire S_0 d'équation $a_3 = 0$ est immobile (déplacement nul), car encastrée dans un matériau indéformable. On néglige les forces de volume (gravité). On se place dans le cadre des petites perturbations.

Équilibre en torsion

On suppose que le système est à l'équilibre et que le déplacement s'écrit

$$\xi_1 = -\alpha\,a_2\,a_3\,, \qquad \xi_2 = \alpha\,a_1\,a_3\,, \qquad \xi_3 = 0\,. \qquad (\mathbf{5}.4)$$

avec $\alpha > 0$ et $\eta = \alpha\,\max(R, L) \ll 1$.

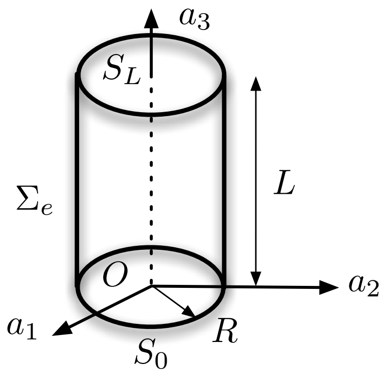

FIGURE **5**.2 – *Arbre métallique de forme cylindrique.*

1) Calculer le tenseur des petites déformations $\underline{\underline{\epsilon}}(\underline{a})$ et justifier l'hypothèse des petites déformations.
2) Calculer le tenseur des dilatations $\underline{\underline{C}}(\underline{a})$ et le comparer à $\underline{\underline{\epsilon}}(\underline{a})$ au premier ordre du petit paramètre η.
3) Donner l'expression du tenseur des contraintes $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{a})$. En déduire la résultante des forces extérieures de contact exercées sur la surface S_L d'équation $a_3 = L$.
4) Montrer que la surface latérale Σ_e, d'équation $(a_1^2 + a_2^2) = R^2$, est libre de contraintes.
5) Calculer le moment résultant en $\underline{0}$ des forces extérieures de contact exercées sur la surface S_0.
6) On suppose que le seuil de rupture du solide est atteint lorsque

$$\frac{1}{2}\,\underline{\underline{s}} : \underline{\underline{s}} \geq k_e^2 \qquad \text{où} \qquad \underline{\underline{s}} = \underline{\underline{\sigma}} - \frac{1}{3}\,(\mathrm{tr}\ \underline{\underline{\sigma}})\ \underline{\underline{I}} \tag{5.5}$$

est la partie déviatorique de $\underline{\underline{\sigma}}$ et $k_e > 0$ une constante (critère de résistance de Von Mises). Au-delà de quelle valeur critique α_c de α, fonction de R, k_e et μ la pièce casse-t-elle ?

Mouvement de torsion

On suppose maintenant que l'arbre est animé du mouvement

$$\underline{\xi}(\underline{a}, t) = \xi_m \sin(k\, a_3) \sin(\omega\, t)\ \left(-a_2\, \underline{e}_1 + a_1\, \underline{e}_2\right) \qquad \text{avec} \quad k = \frac{\pi}{2\,L}\ . \tag{5.6}$$

7) Quelle condition vérifier la pulsation ω pour que $\underline{\xi}(\underline{a}, t)$ soit une solution des équations de Lamé ?
8) Exprimer le tenseur des contraintes $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{a}, t)$.
9) Calculer les forces de surface exercées sur S_L lors de ce mouvement.
10) Montrer que le moment des forces de contact exercées par la partie $a_3 \geq l$ du cylindre sur un disque intérieur S_l de centre $l\ \underline{e}_3$ avec $0 \leq l \leq L$, de rayon R et de normale $\underline{e}_3$ est de la forme $\underline{\Gamma} = \Gamma(l, t)\ \underline{e}_3$ où Γ est une fonction que l'on déterminera.
11) Dessiner l'allure de la fonction $\Gamma(0, t)$ en fonction de t.
12) Dessiner l'allure du profil $\Gamma(a_3, t)$ pour $a_3 \in [0, L]$ pour plusieurs valeurs de t.

13) Interpréter les déformations ou les mouvements de l'ensemble du problème à l'aide de schémas et de quelques commentaires.