Exercices pour le chapitre 4 : Tenseur des contraintes

Version 9 septembre 2018

1 Exercices de niveau I

NIVEAU I Questions simples

On considère le mouvement $\underline{X}(\underline{a},t) = \underline{a} + \eta\, l\, \sin(k\, a_2 - \omega\, t)\, \underline{e}_3$ pour une configuration de référence Ω_0 qui contient le sous-domaine $\mathcal{D}_0 = [0, L_1] \times [0, L_2] \times [0, L_3]$. On suppose $k\, L_2 = \pi/2$.

1) On suppose que $B^{(E)}(\underline{x},t) = C\, \underline{x}^2$. En déduire $B^{(L)}(\underline{a},t)$.

Comme $x_1 = a_1$, $x_2 = a_2$ et $x_3 = a_3 + \eta\, l\, \sin(k\, a_2 - \omega\, t)$, on a

$$B^{(L)}(\underline{a},t) = C\, \left\{ a_1^2 + a_2^2 + [a_3 + \eta\, l\, \sin(k\, a_2 - \omega\, t)]^2 \right\} \ .$$

2) On suppose maintenant que $C^{(L)}(\underline{a},t) = D\, \underline{a}^2$. En déduire $C^{(E)}(\underline{x},t)$.

La déformation inverse $\underline{A}(\underline{x},t)$ s'écrit $a_1 = x_1$, $a_2 = x_2$ et $a_3 = x_3 - \eta\, l\, \sin(k\, x_2 - \omega\, t)$. Comme $C^{(L)}(\underline{a},t) = D\,(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)$, on a donc

$$C^{(E)}(\underline{x},t) = D\, \left\{ x_1^2 + x_2^2 + [x_3 - \eta\, l\, \sin(k\, x_2 - \omega\, t)]^2 \right\} \ .$$

3) Calculer $\underline{\underline{F}}(\underline{a},t)$ et $J(\underline{a},t)$. On note $\mathcal{D}(t)$ l'image de $\mathcal{D}_0$ par la déformation $\underline{X}$ au temps t. Calculer l'intégrale $\iiint_{\mathcal{D}(t)} x_2\, d^3x$.

On calcule $\underline{\underline{F}}(\underline{a},t) = \underline{\underline{I}} + k\,\eta\, l\, \cos(k\, a_2 - \omega\, t)\, \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_2$, c'est-à-dire $F_{11} = 1$, $F_{22} = F_{33} = 1$, $F_{32} = k\,\eta\, l\, \cos(k\, a_2 - \omega\, t)$ et $F_{ij} = 0$ sinon. On en déduit $J(\underline{a},t) = 1$. On a donc

$$\iiint_{\mathcal{D}} x_2\, d^3x = \iiint_{\mathcal{D}_0} a_2\, d^3a = \frac{1}{2}\, L_1\, L_2^2\, L_3. \qquad (\mathbf{4}.1)$$

4) Calculer le champ de déplacement $\underline{\xi}(\underline{a},t)$. Calculer le tenseur des petites déformations $\underline{\underline{\epsilon}}(\underline{a},t)$.

On a $\underline{\xi}(\underline{a},t) = \eta\, l\, \sin(k\, a_2 - \omega\, t)\, \underline{e}_3$ et

$$\underline{\underline{\epsilon}}(\underline{a},t) = \frac{1}{2}\, \eta\, k\, l\, \cos(k\, a_2 - \omega\, t)\, (\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_3 + \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_2) \ .$$

c'est-à-dire $\epsilon_{23} = \epsilon_{23} = \frac{1}{2}\, \eta\, k\, l\, \cos(k\, a_2 - \omega\, t)$ et $\epsilon_{ij} = 0$ sinon.

5) En présence de force de gravité $\underline{f} = -\rho_0\ g\ \underline{e}_3$ calculer la résultante $\underline{\mathcal{F}}_{\text{extvol}}[\mathcal{D}(t)]$ et le moment $\underline{\mathcal{M}}_{\text{extvol}}[\mathcal{D}(t)]$ en $\underline{0}$ à l'ordre dominant en η.

Le poids est $\underline{\mathcal{F}}_{\text{extvol}}[\mathcal{D}(t)] = -m_0\, g\, \underline{e}_3$. Le moment en $\underline{0}$ est

$$\begin{aligned} \underline{\mathcal{M}}_{\text{extvol}}[\mathcal{D}(t)] &= \iiint_{\mathcal{D}_0} \underline{a} \wedge \underline{f}(\underline{a},t)\, d^3a\, [1+O(\eta)] \\ &= \rho_0\, g \iiint_{\mathcal{D}_0} (-a_2\, \underline{e}_1 + a_1\, \underline{e}_2)\, d^3a\, [1+O(\eta)] \\ &= \frac{1}{2}\, m_0\, g\, (-L_2\, \underline{e}_1 + L_1\, \underline{e}_2)\, [1+O(\eta)]\,. \end{aligned}$$

6) On suppose que $\eta \ll 1$ et que la frontière $\partial\mathcal{D}(t)$ de $\mathcal{D}(t)$ est soumise aux forces de contact $\underline{T}(\underline{x},\underline{n},t) = -p(\underline{x},t)\,\underline{n}$ avec $p(\underline{x},t) = p_a - \rho_{eau}\, g\, x_3$. Calculer $\underline{\mathcal{F}}_{\text{extcont}}[\mathcal{D}(t)]$ à l'ordre dominant du petit paramètre η.

On considère le tenseur des contraintes $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{a},t) = -p(\underline{a},t)\,\underline{\underline{I}}$ avec $p(\underline{a},t) = p_a - \rho_{eau}\, g\, a_3$ ce qui conduit à $\underline{f}_{\text{cont}}(\underline{a},t) = \underline{\text{div}}\, \underline{\underline{\sigma}} = -\underline{\text{grad}}\; p = \rho_{eau}\, g\, \underline{e}_3$. Les forces de contacts associées sont celles de l'énoncé. On a donc $\underline{\mathcal{F}}_{\text{extcont}}[\mathcal{D}(t)] = \rho_{eau}\, g\, L_1\, L_2\, L_3\, \underline{e}_3$. C'est la poussée d'Archimède si ρ_{eau} est la masse volumique de l'eau. On a $\underline{\mathcal{M}}_{\text{extcont}}[\mathcal{D}(t)] = \frac{1}{2}\, \rho_{eau}\, g\, L_1\, L_2\, L_3 (L_2\, e_1 - L_1\, e_2)$. C'est le moment en $\underline{0}$ du poids appliqué au centre de gravité $\underline{x}_G = \frac{1}{2}(L_1\, \underline{e}_1 + L_2\, \underline{e}_2 + L_3\, \underline{e}_3)$.

7) Montrer que le principe fondamental, dans le cas des petites déformations, se traduit par la loi de conservation de la quantité de mouvement et la symétrie du tenseur des contraintes. Écrire cette loi.

Le principe fondamentale de la dynamique se traduit par la loi de conservation de mouvement $\rho_0\, \frac{\partial^2 \underline{\xi}}{\partial t^2}(\underline{a},t) = \underline{f}(\underline{a},t) + \underline{\text{div}}\, \underline{\underline{\sigma}}(\underline{a},t)$, déduite du bilan global de quantité de mouvement ainsi que par la nullité du vecteur $\underline{C} = \iint_{\partial\mathcal{D}_0} \underline{a} \wedge (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n})\; dS_0 - \iiint_{\mathcal{D}_0} \underline{a} \wedge \underline{\text{div}}\, \underline{\underline{\sigma}}\; d^3a$ en utilisant cette loi dans le bilan global de moment cinétique. On en déduit, en calculant les composantes de $\underline{C}$, que $\underline{\underline{\sigma}}$ est symétrique.

2 Exercices de niveau II

NIVEAU II Calculs sans efforts

En tout point $\underline{a}$ d'un domaine Ω_0 on suppose que les forces de contact $\underline{T}(\underline{a},\underline{n})$ exercées sur un élément de surface de normale $\underline{n}$ vérifient les relations

$$\underline{T}\,(\underline{a},\underline{e}_3) = \frac{\beta}{2}\, a_3^2\, \underline{e}_3, \qquad \underline{T}\,(\underline{a},\underline{e}_2)\cdot\underline{e}_1 = \frac{\beta}{2}\, a_3^2 \quad \text{et} \quad \underline{T}\,(\underline{a},\underline{n}_*) = \frac{\beta}{2}\, \underline{a}^2\, \underline{n}_*\,, \tag{4.2}$$

où $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$, est un repère orthonormé, a_3 la troisième composante de $\underline{a}$ dans ce repère et $\underline{n}_* = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(\underline{e}_1 + \underline{e}_2)$ un vecteur unitaire. On suppose que la densité des forces extérieures de volume est $\underline{f}(\underline{a}) = -\beta\, \underline{a}$.

1) Quelle est la dimension du paramètre constant β ?

La constante β est en N m^{-4} ou encore en Pa m^{-2}.

2) Exprimer toutes les composantes du tenseur des contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$ en fonction de $\underline{a}$.

Les composantes du tenseur des contraintes sont $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \frac{\beta}{2}\,(a_1^2 + a_2^2)$, $\sigma_{12} = \sigma_{21} = \sigma_{33} = \frac{\beta}{2} a_3^2$ et $\sigma_{13} = \sigma_{31} = \sigma_{23} = \sigma_{32} = 0$.

On considère un sous-domaine $\mathcal{D}_0$ qui a la forme d'un parallélépipède centré en $\underline{0}$ de cotés l_1, l_2 et l_3 qui est donc défini par

$$\mathcal{D}_0 = \left\{ \underline{a} \in I\!R^3 : |a_1| \leq \frac{l_1}{2}, |a_2| \leq \frac{l_2}{2} \text{ et } |a_3| \leq \frac{l_3}{2} \right\} . \tag{4.3}$$

3) Calculer l'expression de $\underline{f}_{\text{cont}}(\underline{a}) = \underline{\text{div}}\, \underline{\underline{\sigma}}(\underline{a})$.

> On obtient $\underline{f}_{\text{cont}} = \underline{\text{div}}\, \underline{\underline{\sigma}} = \beta\, \underline{a}$.

4) Calculer la résultante $\underline{\mathcal{F}}(\mathcal{D}_0) = \underline{\mathcal{F}}_{\text{extvol}}(\mathcal{D}_0) + \underline{\mathcal{F}}_{\text{extcont}}(\mathcal{D}_0)$ des forces extérieures de volume et des forces de contact extérieures à $\mathcal{D}_0$.

> Comme $\underline{f}_{\text{cont}} + \underline{f} = \underline{0}$, on a $\underline{\mathcal{F}}(\mathcal{D}) = \underline{0}$.

5) Calculer le moment $\underline{\mathcal{M}}_{\text{extvol}}(\mathcal{D}_0)$ en $\underline{0}$ des forces extérieures de volume.

> On a $\underline{\mathcal{M}}_{\text{extvol}}(\mathcal{D}) = \iiint_{\mathcal{D}} \underline{x} \wedge \underline{f}(\underline{a})\ d^3a = \underline{0}$ car $\underline{f} = -\beta \underline{a}$.

6) Calculer le moment $\underline{\mathcal{M}}_{\text{extcont}}(\mathcal{D}_0)$ en $\underline{0}$ des forces de contact extérieures à $\mathcal{D}_0$.

> Comme $\underline{\underline{\sigma}}$ est symétrique, on a $\underline{\mathcal{M}}_{\text{extcont}}(\mathcal{D}_0) = \iiint_{\mathcal{D}} \underline{a} \wedge \underline{f}_{\text{cont}}(\underline{a})\ d^3a = \underline{0}$ car $\underline{f}_{\text{cont}} = \beta\, \underline{a}$.

3 Exercices de niveau III

NIVEAU III — Utilisation d'un tricercle de Mohr

On donne le tenseur des contraintes en un point $\underline{a}$ d'un matériau continu :

$$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{a}, t) = \sigma_0 \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} , \quad \text{avec } \sigma_0 = 10^7 \ \text{ Pa.} \tag{4.4}$$

1) Donner la valeur propre évidente que l'on notera σ_1 et la direction propre associée que l'on notera $\underline{n}_1$.
2) Calculer les trois valeurs propres $\sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3$ de $\underline{\underline{\sigma}}$ et tracer le tricercle de Mohr. Il n'est pas demandé de calculer les vecteurs propres unitaires $\underline{n}_2$ et $\underline{n}_3$ correspondants à σ_2 et σ_3.
3) Calculer les composantes normale et tangentielle σ et τ des vecteurs contraintes qui s'exercent sur les facettes de normales respectives $\underline{e}_1$ et $\underline{e}_2$. Représenter les points M_1 et M_2 correspondants sur le diagramme de Mohr.
4) Calculer les composantes normales et tangentielles σ et τ du vecteur contrainte qui s'exerce sur la facette normale à la direction engendrée par le vecteur ${}^t(1, 1, 0)$. Représenter ce point M_3 sur le diagramme de Mohr.

Limites de rupture et tricercle de Mohr

On appelle domaine d'élasticité d'un matériau le lieu des points dans le plan (σ, τ) pour lesquels l'hypothèse des petites perturbations est valide. La frontière

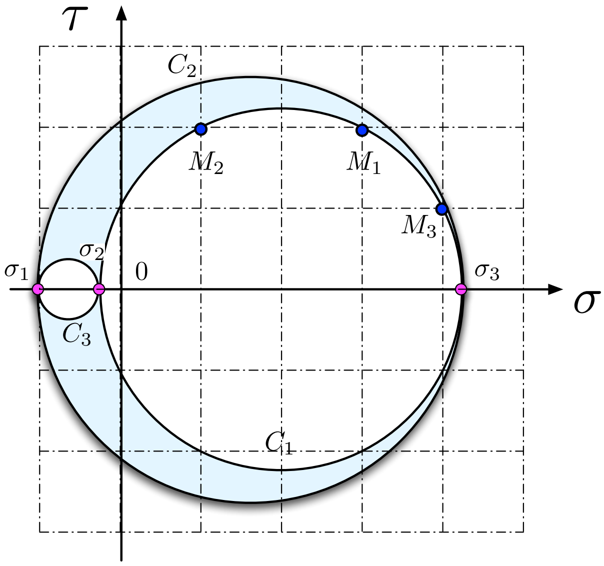

FIGURE **4**.1 – Tracé du tricercle de Mohr et points particuliers.

de ce domaine indique les limites d'élasticité du matériau. On supposera ici que cette frontière est proche des limites de rupture qui définissent en général un domaine légèrement plus grand que le domaine d'élasticité.

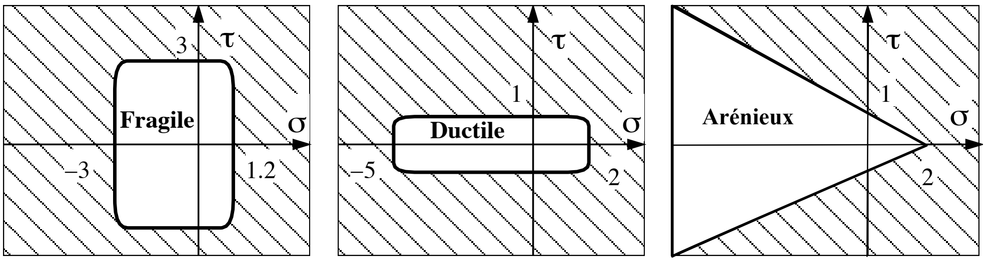

FIGURE **4**.2 – Domaine d'élasticité et de rupture de trois matériaux.

On considère trois types de matériaux (ductile, fragile et arénieux) dont les domaines d'élasticité, et donc les frontières de rupture, sont représentées sur la figure **4**.2. L'unité des axes σ et τ est égale à 10^7 Pa.

5) On suppose que le tenseur des contraintes est donné par $\sigma_{11} = -2\sigma_0$, $\sigma_{33} = \sigma_0$, $\sigma_{ij} = 0$ sinon, avec σ_0 variable. Pour les trois courbes de limite de rupture, déterminer graphiquement la valeur maximale σ_m du paramètre σ_0 au-delà de laquelle le matériau est endommagé. Montrer que ces valeurs maximale sont respectivement $\sigma_m = 1.2\ 10^7$ Pa, $\sigma_m \sim \frac{1}{3}\ 10^7$ Pa et $\sigma_m = \frac{5}{3\sqrt{29}}\ 10^7 \text{ Pa} \sim 0.71\ 10^7$ Pa
6) Interpréter physiquement les notions de matériau fragile (acier, fonte, béton, verre), ductile (acier doux, aluminium, cuivre, plomb) et arénieu (sable, sol) à partir de la forme des courbes de limite d'élasticité.

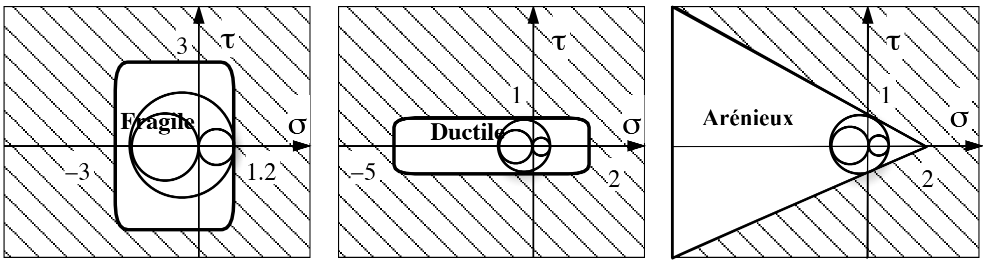

FIGURE 4.3 – Rupture de trois matériaux pour $\sigma_1 = -2\,\sigma_0$, $\sigma_2 = 0$ et $\sigma_3 = \sigma_0$.