Exercices pour le chapitre 2 : Hypothèse du continu

Version 9 septembre 2018

1 Exercices de niveau I

NIVEAU I Questions simples

1) Est-ce que $\mathcal{F}(\mathcal{D}) = \mathcal{V}(\mathcal{D})$ vérifie l'hypothèse du continu ? Même question pour $\mathcal{S}(\mathcal{D}) = \iint_{\partial\mathcal{D}} dS$.

> $\mathcal{F}$ vérifie l'hypothèse du continu mais pas $\mathcal{S}$.

2) On suppose que $\mathcal{F}(\mathcal{D}) + \iint_{\partial\mathcal{D}} q_c(\underline{x}, \underline{n}, t)\, dS = 0$ pour tout domaine $\mathcal{D}$ où $\mathcal{F}$ vérifie l'hypothèse du continue. En déduire que $\mathcal{F}(\mathcal{D}) = -\iiint_{\mathcal{D}} \text{div}\, \underline{Q}(\underline{x}, t)\, d^3x$ où $\underline{Q}$ est un champ dont on justifiera l'existence.

> Comme $\iint_{\partial\mathcal{D}} q_c(\underline{x}, \underline{n}, t)\, dS$ vérifie l'hypothès du continue, il existe un champ $\underline{Q}(\underline{x}, t)$ tel que $q_c(\underline{x}, \underline{n}, t) = \underline{Q}(\underline{x}, t) \cdot \underline{n}$. La formule de la divergence permet de conclure.

3) À $t = 0$, on injecte ponctuellement une quantité $C_{tot} = 1$ kg d'un colorant en $\underline{x} = 0$. On suppose qu'il diffuse dans l'espace avec un coefficient de diffusion $k_c = \frac{1}{4\pi} 10^{-8}$ m^2 s^{-1}. Au bout de combien de temps la concentration maximale est-elle inférieure à une tonne par mètre cube ?

> La concentration maximale est $c_{max}(t) = C_{tot}\, (4\,\pi\, k_c\, t)^{-3/2}$. Au temps $t = t_*$ on a $c_{max}(t_*) = 10^3$ kg/m^3. On a donc $4\,\pi\, k_c\, t = [C_{tot}/c_{max}(t_*)]^{2/3} = 10^{-2}$ m^2 d'où $t = 10^6$ s.

4) On chauffe une barre de longueur $l = 1$ m à un taux $r = 10^3$ W/m^3. La diffusivité thermique est $\kappa = 2\,.\,10^{-4}$ m^2/s et $\rho\, c = 10^6$ J m^{-3} K^{-1}. On suppose que $T = T_0 = 20°$ C en $x = 0$ et que le flux thermique est nul en $x = l$. Calculer le champ de température $T(x)$ dans le cas stationnaire (indépendant du temps). Calculer la température $T(l)$ en $x = l$.

> On $\kappa\, T''(x) + \frac{r}{\rho\, c} = 0$ avec $T(0) = T_0$ et $T'(l) = 0$, d'où $T'(x) = -\frac{r}{\rho\, c\, \kappa}(x - l)$ en utilisant la condition $T'(l) = 0$ et $T(x) = T_0 + \frac{r}{\rho\, c\, \kappa}(l\, x - x^2/2)$ en utilisant la condition $T(0) = T_0$. On en déduit $T(l) = T_0 + \frac{r\, l^2}{2\, \rho\, c\, \kappa} = 22.5°$ C.

2 Exercices de niveau II

NIVEAU II Fonte de la glace

Un milieu continu a la forme d'un parallélépipède rectangle de dimensions l_1 x l_2 x l_3 = 5cm x 2cm x 1cm. On pose le parallélépipède couché sur une plaque chauffante du côté d'une face l_1 x l_2. L'autre face est en contact avec un morceau de glace en m'arrangeant pour que l'eau de fonte soit évacuée loin du parallélépipède , et pour que les quatre autres faces soient thermiquement isolées. En maintenant la plaque à un température de 50 °C, on fait fondre le morceau de glace en 1h. On tourne ensuite tourné le parallélépipède en mettant en contact les faces l_1 x l_3, et on recommence l'expérience avec la même quantité de glace. On suppose que les champs sont stationnaires (indépendant du temps) pendant les expériences.

1) Exprimer le champ de température pour les deux expériences.

> En choisissant le repère de sorte que $z = 0$ soit l'équation de la plaque chaude, on a $T(z) = T_{50} - \frac{T_{50}-T_0}{l_3}\, z$ pour la première expérience et $T(z) = T_{50} - \frac{T_{50}-T_0}{l_2}\, z$ pour la seconde.

2) En combien de temps la glace a-t-elle fondu ?

> Si T_{50} et T_0 sont les deux températures de plaque, le flux de chaleur de la plaque vers la glace est $Q_a = k\, \frac{T_{50}-T_0}{l_3}$ pour la première expérience et $Q_b = k\, \frac{T_{50}-T_0}{l_2}$ pour la deuxième. Comme les surfaces de contact sont respectivement $S_a = l_1 l_2$ et $S_b = l_1 l_3$, les flux de chaleur sortants allant du parallélépipède vers la glace sont $q_a = Q_a\, S_a$ et $q_b = Q_b\, S_b$. En appliquant la $\frac{d}{dt}\left[\mathcal{E}_{\text{int}}(\mathcal{D}, t)\right] = \mathcal{P}_{\text{the}}(\mathcal{D}, t)$ où $\mathcal{D}$ est le volume occupé par la glace, on obtient $\mathcal{E}_{\text{int}}(\mathcal{D}, t) = \mathcal{E}_{\text{int}}(\mathcal{D}, 0) + q_a\, t$ et $\mathcal{E}_{\text{int}}(\mathcal{D}, t) = \mathcal{E}_{\text{int}}(\mathcal{D}, 0) + q_b\, t$ dans la mesure où les puissances thermiques respectives $\mathcal{P}_{\text{the}}(\mathcal{D}, t) = q_a$ et $\mathcal{P}_{\text{the}}(\mathcal{D}, t) = q_b$ ne dépendent pas du temps. En notant $\Delta E = \mathcal{E}_{\text{int}}(\mathcal{D}, T_a) - \mathcal{E}_{\text{int}}(\mathcal{D}, 0) = \mathcal{E}_{\text{int}}(\mathcal{D}, T_b) - \mathcal{E}_{\text{int}}(\mathcal{D}, 0)$ l'énergie nécessaire pour faire fondre la glace, en déduit $q_a\, T_a = q_b\, T_b$ où T_a et T_b sont les temps de fonte respectifs des deux expériences. On en déduit $q_a = k\, (T_{50} - T_0) \frac{l_1\, l_2}{l_3}$ et $q_b = k\, (T_{50} - T_0) \frac{l_1\, l_3}{l_2}$. Comme le rapport de ces puissances est $(l_3/l_2)^2 = 1/4$, ont conclut que le temps de fonte est 4 fois plus grand lors de la seconde expérience, et donc égal à 4h.

3 Exercices de niveau III

NIVEAU III Expérience thermostatée

On considère une pièce M de côtés $l_1 = 1.5$ m, $l_2 = 1$ m et $l_3 = 0.5$ m, encastrée entre deux pièces A et B de largeur $l = 0.4$ m (figure **2**.1) consituées d'un matériau différent. On suppose que l'on peut maintenir à température constante certaines faces de ces pièces tandis que les autres faces sont thermiquement isolées.

Dans un premier temps, on considère la pièce M seule, en l'absence des pièces A et B. On maintient une des surfaces M normale à $\underline{e}_1$ à la température $T_A = 25°\text{C}$, l'autre à température $T_B = 15°\text{C}$. En mesurant les flux de chaleur qu'il faut fournir aux bains thermostatés, on constate que le dispositif consomme 10 Watts.

1) Calculer le coefficient de conductivité thermique k_M du matériau de la pièce M.
2) On recommence la même expérience avec la pièce A ou B seule, et on mesure une puissance de 120 W. Calculer le coefficient de conductivité

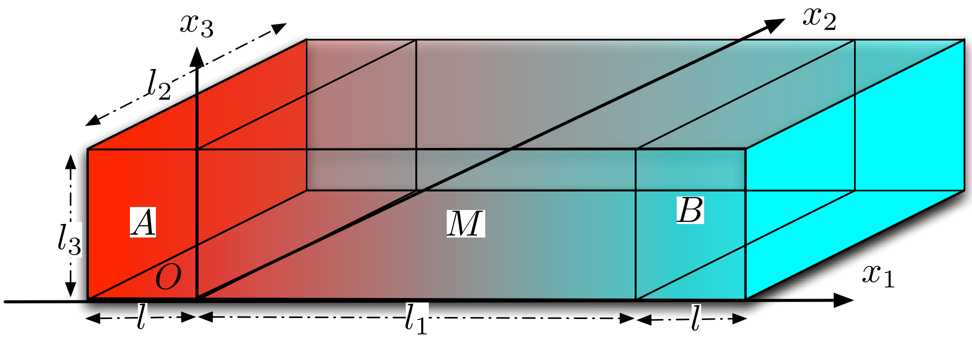

FIGURE **2**.1 – Pièces M, A et B conductrices de chaleur.

thermique k du matériau des pièces A et B.

3) On considère le montage encastré pour lequel on maintient la température de la face externe de A normale à $\underline{e}_1$ à la température $T_A = 25°\text{C}$ et celle de B à la température $T_B = 15°\text{C}$. Calculer la répartition de température $T(\underline{x})$ en tout point $\underline{x}$ du montage et indiquer les températures aux interfaces des pièces.
4) En déduire le vecteur flux de chaleur $\underline{Q}(\underline{x})$. Calculer la puissance P que consomme ce dispositif.
5) Calculer le coefficient de conductivité thermique équivalent pour le montage multi-pièces et comparer le avec ceux de chacune des pièces. Commenter à l'aide d'une analogie électrique.