Exercices corrigés niveau III pour le chapitre 2 : Hypothèse du continu

1 Exercices de niveau III

NIVEAU III Expérience thermostatée

On considère une pièce M de côtés $l_1 = 1.5$ m, $l_2 = 1$ m et $l_3 = 0.5$ m, encastrée entre deux pièces A et B de largeur $l = 0.4$ m (figure **2**.1) consituées d'un matériau différent. On suppose que l'on peut maintenir à température constante certaines faces de ces pièces tandis que les autres faces sont thermiquement isolées.

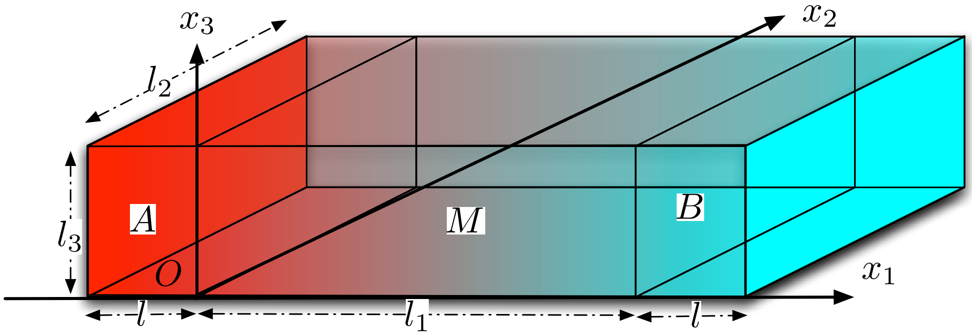

FIGURE **2**.1 – Pièces M, A et B conductrices de chaleur.

Dans un premier temps, on considère la pièce M seule, en l'absence des pièces A et B. On maintient une des surfaces M normale à $\underline{e}_1$ à la température $T_A = 25°C$, l'autre à température $T_B = 15°C$. En mesurant les flux de chaleur qu'il faut fournir aux bains thermostatés, on constate que le dispositif consomme 10 Watts.

1) Calculer le coefficient de conductivité thermique k_M du matériau de la pièce M.

Le gradient de température est $\Gamma_1 = (T_B - T_A)/l_1 = -6.6$ K.m^{-1}. En notant $P = 10$ W la puissance, le flux de chaleur dans la direction $\underline{e}_1$ est $Q_1 = -P/(l_2 l_3) = 20$ Wm^{-2}, d'où $k_M = -Q_1/\Gamma_1 = 3$ W.K^{-1}.m^{-1}.

2) On recommence la même expérience avec la pièce A ou B seule, et on mesure une puissance de 120 W. Calculer le coefficient de conductivité

thermique k du matériau des pièces A et B.

En notant $P' = 120$ W la nouvelle puissance mesurée, on a maintenant $\Gamma_1 = (T_B - T_A)/l = 25$ Km^{-1} et $Q_1 = -P'/(l_2 l_3) = 240$ W.m^{-1}, d'où $k = 9.6$ W.K^{-1}.m^{-1}.

3) On considère le montage encastré pour lequel on maintient la température de la face externe de A normale à $\underline{e}_1$ à la température $T_A = 25°$C et celle de B à la température $T_B = 15°$C. Calculer la répartition de température $T(\underline{x})$ en tout point $\underline{x}$ du montage et indiquer les températures aux interfaces des pièces.

La température ne dépend que de x_1. Le profil est linéaire par morceaux car le flux de chaleur Q_1 est constant. Il varie de T_A à T'_A dans la pièce A avec un gradient $\Gamma = -Q_1/k$, de T'_A à T'_B dans la pièce M avec un gradient $\Gamma_M = -Q_1/k_M$ et de T'_B à T_B dans la pièce B avec le gradient Γ. En éliminant Q_1 entre les relations $\frac{T'_A - T_A}{l} = -\frac{Q_1}{k}$, $\frac{T'_B - T'_A}{l_1} = -\frac{Q_1}{k_M}$ et $\frac{T_B - T'_B}{l} = -\frac{Q_1}{k}$, on obtient $T'_A = T_A + (T_B + T_A)\left(\frac{k_M l}{k l_1}\right)\left(1 + 2\frac{k_M l}{k l_1}\right)^{-1} = 24.3°$C et $T'_B = 15.7°$C.

4) En déduire le vecteur flux de chaleur $\underline{Q}(\underline{x})$. Calculer la puissance P que consomme ce dispositif.

On en déduit $Q_1 = -(T_B - T_A)\frac{k_M}{l_1}\left(1 + 2\frac{k_M l}{k l_1}\right)^{-1} = -17$ W.m^{-2}. La puissance consommée est donc $P'' = -Q_1 l_2 l_3 = 8.5$ W. Malgré la largeur des pièces A et B, le montage conduit à peine plus de chaleur.

5) Calculer le coefficient de conductivité thermique équivalent pour le montage multi-pièces et comparer le avec ceux de chacune des pièces. Commenter à l'aide d'une analogie électrique.

On peut écrire $Q_1 = -k_{\text{eq}} \frac{T_A - T_B}{l_1 + 2l}$ avec $k_{\text{eq}} = (l_1 + 2l)/\left(\frac{l_1}{k_M} + \frac{2l}{k}\right) = 3.9$ W.m^{-1}.K^{-1}. On obtient une analogie électrique en comparant l'inverse des coefficients de conductivité thermique à des résistances linéiques, le flux de chaleur au courant et la différence de température à la différence de potentiel.