Exercices corrigés niveau III pour le chapitre 1 : Algèbre linéaire et tenseurs

1 Exercices de niveau III

NIVEAU III Révision sur les tenseurs (B)

1) On considère $\underline{\underline{K}} = \underline{\underline{\text{grad}}}\ \underline{U}$ et sa décomposition $\underline{\underline{K}} = \underline{\underline{\Omega}} + \underline{\underline{D}}$ en partie antisymétrique et symétrique. On pose $\underline{\underline{\tau}} = \lambda_n \text{ tr } (\underline{\underline{D}})\ \underline{\underline{I}} + 2\,\mu_n\ \underline{\underline{D}}$. Montrer que $\underline{\text{div}}\,\underline{\underline{\tau}} = (\lambda_n + \mu_n)\ \underline{\text{grad}}\ (\text{div}\ \underline{U}) + \mu_n\ \Delta\underline{U}$.

On a $\tau_{ij} = \lambda_n\, D_{ll}\, \delta_{ij} + 2\,\mu_n\, D_{ij} = \lambda_n\, \frac{\partial U_l}{\partial x_l}\, \delta_{ij} + \mu_n \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right)$. On en déduit $\underline{\text{div}}\,\underline{\underline{\tau}} = \frac{\partial \tau_i}{\partial x_j}\,\underline{e}_i = \left[\lambda_n\, \frac{\partial^2 U_l}{\partial x_l\, \partial x_j}\, \delta_{ij} + \mu_n\, \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j\, \partial x_j} + \mu_n\, \frac{\partial^2 U_j}{\partial x_i\, \partial x_j}\right] \underline{e}_i$. On a donc $\underline{\text{div}}\,\underline{\underline{\tau}} = \left[(\lambda_n + \mu_n)\, \frac{\partial^2 U_j}{\partial x_i\, \partial x_j} + \mu_n\, \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j\, \partial x_j}\right] \underline{e}_i = (\lambda_n + \mu_n)\ \underline{\text{grad}}\ (\text{div}\ \underline{U}) + \mu_n\ \Delta\underline{U}$.

2) Ecrire la formule de la divergence $\iint_{\partial\mathcal{D}} \underline{Q}\cdot\underline{n}\, dS = \iiint_{\mathcal{D}} \text{div}\ \underline{Q}\, dx^3$ avec la convention d'Einstein. Exprimer les composantes du vecteur $\underline{C} = \underline{A} - \underline{B}$ avec $\underline{A} = \iint_{\partial\mathcal{D}} \underline{x}\wedge\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x})\cdot\underline{n}\, dS$ et $\underline{B} = \iiint_{\mathcal{D}} \underline{x}\wedge\underline{\text{div}}\ \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x})\ d^3x$. En déduire que $\underline{\underline{\sigma}}$ est symétrique lorsque $\underline{C} = \underline{0}$ pour tout domaine $\mathcal{D}$.

La formule de la divergence peut s'écrire sous la forme $\iint_{\partial\mathcal{D}} Q_l\, n_l\, dS = \iiint_{\mathcal{D}} \frac{\partial Q_l}{\partial x_l}\, dx^3$. En appliquant la formule de la divergence à l'expression $A_i = \iint_{\partial\mathcal{D}} \epsilon_{ijk}\, x_j\, \sigma_{kl}\, n_l\, dS = \iiint_{\mathcal{D}} \frac{\partial(x_j\, \sigma_{kl})}{\partial x_l}\, dx^3 = \iiint_{\mathcal{D}} \epsilon_{ijk}\, \delta_{jl}\, \sigma_{kl}\, dx^3 + \iiint_{\mathcal{D}} \epsilon_{ijk}\, x_j\, \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial x_l}\, dx^3$ et en remarquant que $B_i = \iiint_{\mathcal{D}} \epsilon_{ijk}\, x_j\, \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial x_l}\, dx^3$, on obtient $C_i = \epsilon_{ijk}\, \delta_{jl}\, \iiint_{\mathcal{D}} \sigma_{kl}\, dx^3 = \epsilon_{ijk}\, \iiint_{\mathcal{D}} \sigma_{kj}\, dx^3 =$. On a donc $C_1 = \iiint_{\mathcal{D}} (\sigma_{32} - \sigma_{23})\, dx^3$, $C_2 = \iiint_{\mathcal{D}} (\sigma_{13} - \sigma_{31})\, dx^3$ et $C_3 = \iiint_{\mathcal{D}} (\sigma_{12} - \sigma_{21})\, dx^3$. On voit que $\underline{\underline{\sigma}}$ est symétrique si $\underline{C} = \underline{0}$ pour des domaines $\mathcal{D}$ de plus en plus petits.

3) On considère un champ de tenseurs d'ordre deux symétrique $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x})$ et un champ de vecteurs $\underline{U}(\underline{x})$. On note $\underline{\underline{K}} = \underline{\underline{\text{grad}}}\ \underline{U}$ et $\underline{\underline{K}} = \underline{\underline{\Omega}} + \underline{\underline{D}}$ sa décomposition en partie antisymétrique et symétrique. On note $A = \iint_{\partial\mathcal{D}} \underline{U}\cdot\underline{\underline{\sigma}}\cdot\underline{n}\, dS$, $B = \iiint_{\mathcal{D}} \underline{\text{div}}\ \underline{\underline{\sigma}}\cdot\underline{U}\ d^3x$ et $C = A - B$. Montrer que $C = \iiint_{\mathcal{D}} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{D}}\ d^3x$.

En appliquant la formule de la divergence, $A = \iint_{\partial\mathcal{D}} \underline{U}\cdot\underline{\underline{\sigma}}\cdot\underline{n}\, dS = \iint_{\partial\mathcal{D}} U_i\, \sigma_{ij}\, n_j\, dS = \iiint_{\mathcal{D}} \frac{\partial(U_i\, \sigma_{ij})}{\partial x_j}\, d^3x = \iiint_{\mathcal{D}} U_i\, \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}\, d^3x + \iiint_{\mathcal{D}} \frac{\partial U_i}{\partial x_j}\, \sigma_{ij}\, d^3x$. Comme $B = \iiint_{\mathcal{D}} U_i\, \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}\, d^3x$, on a $C = \iiint_{\mathcal{D}} K_{ij}\, \sigma_{ij}\, d^3x$ avec $K_{ij} = \frac{\partial U_i}{\partial x_j}$. Comme $\underline{\underline{\sigma}} : {}^t\underline{\underline{K}} = \sigma_{ij}\, K_{ij} = \sigma_{ij}\, D_{ij} + \sigma_{ij}\, \Omega_{ij}$ et que $\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\Omega}} = \sigma_{ij}\, \Omega_{ji} = -\sigma_{ji}\, \Omega_{ij} = -\sigma_{ij}\, \Omega_{ji} = -\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\Omega}} = 0$, on a $\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{K}} = \underline{\underline{\sigma}} : {}^t\underline{\underline{K}} = \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{D}}$.